



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
M O N D L A N E

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Modelos para o Cálculo do Prémio
em Seguro de Vida

Autor: Júlio Boavida Sambo

Maputo, Setembro de 2024





UNIVERSIDADE
E D U A R D O
M O N D L A N E

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Modelos para o Cálculo do Prémio
em Seguro de Vida

Autor: Júlio Boavida Sambo

Supervisor: Doutor Tomé Eduardo Sicaio

Maputo, Setembro de 2024

Dedicatória

Á toda minha família, em especial aos meus irmãos gémeos mais novos.

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane

Maputo, 19 de dezembro de 2024

(Júlio Boavida Sambo)

Agradecimentos

Com profunda gratidão, expresso o meu sincero reconhecimento a todos que, de diversas formas, contribuíram para a realização deste trabalho:

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela dádiva da vida, pela força, saúde e sabedoria que permitiram-me chegar até aqui, superando todos desafios ao longo desta jornada.

Ao meu supervisor, Doutor Tomé Eduardo Sicuti, pela paciência, apoio constante e inestimável compreensão, que foram essenciais mesmo diante das dificuldades encontradas.

O seu vasto conhecimento foi fundamental para a concretização deste estudo.

À Universidade Eduardo Mondlane, pela bolsa concedida e pelas oportunidades oferecidas durante a minha formação, que foram cruciais no crescimento académico.

Aos meus pais, pelo amor, pelos valores e pelos ensinamentos que sempre me transmitiram; aos meus irmãos pelo incentivo constante ao longo de toda minha jornada académica. A toda minha família, que, de diferentes formas, contribuiu para que eu chegasse até este momento, o meu profundo agradecimento.

Aos meus professores, pelo valioso conhecimento que transmitiram e que tanto contribuiu para o meu desenvolvimento pessoal e académico.

Aos colegas de curso e amigos, pelo companheirismo, apoio e partilha de conhecimentos, que tornaram esta jornada mais leve e enriquecedora.

Resumo

Este trabalho descreve matematicamente os modelos actuariais para o cálculo de prémio em seguros de vida, com implementação no *software R*. A precificação abrange seguros de vida individuais, bem como seguros para duas vidas, em tempo contínuo e discreto. São utilizadas tábuas de mortalidade e de comutação para simplificar os cálculos dos prémios no modelo discreto, enquanto a modelagem contínua segue a lei de Gompertz-Makeham. Em vez de recorrer a pacotes preexistentes, opta-se por uma implementação manual dos modelos no *software R*, permitindo uma aplicação personalizada da teoria actuarial. O trabalho inclui também a determinação e análise dos prémios em seguros de vida inteira, temporário e dotais, considerando o factor idade do segurado.

Palavras-chave: Prémio de seguro de vida. Modelos contínuos e discretos. Tábuas de vida e de comutação. Lei de *Gompertz-Makeham*. Implementação manual no *software R*.

Abstract

This work mathematically describes the actuarial models for the calculation of life insurance premiums, with implementation in the R software. The pricing includes individual life insurance as well as two-life insurance, both in continuous and discrete time. Mortality and commutation tables are used to simplify the premium calculations in the discrete model, while the continuous model follows the Gompertz-Makeham law. Instead of relying on pre-existing packages, a manual implementation of the models in R is chosen, allowing for a personalized application of actuarial theory. The work also includes the determination and analysis of premiums for whole life, term, and endowment life insurance, taking into account the age factor of the policyholder.

Keywords: *Life insurance premium. Continuous and discrete models. Life tables and commutation functions. Gompertz-Makeham law. Manual implementation in R software.*

Abreviaturas e Siglas

- PP - Prémio Puro
- VPA - Valor Presente Actuarial
- SOA - Society of Actuaries (Sociedade dos Actuários)
- (x) - Indivíduo com idade x
- T_x - Variável aleatória do tempo de vida futuro
- K_x - Variável aleatória do tempo de vida curtado;
- $T_{(xy)}$ - Variável aleatória do tempo futuro de vida conjunta
- $K_{(xy)}$ - Variável aleatória do tempo curtado de vida conjunta
- $T_{(\overline{xy})}$ - Variável aleatória do tempo futuro de último sobrevivente
- $K_{(\overline{xy})}$ - Variável aleatória do tempo curtado de último sobrevivente

Lista de Figuras

6.1	Configurações iniciais	47
6.2	Construção da tábua de mortalidade.	48
6.3	Construção da tábua de mortalidade a partir dos dados do pacote <i>lifecon-</i> <i>tingencies</i>	49
6.4	Gráfico de probabilidades de sobrevivência e de mortalidade em função da idade	49
6.5	Construção da tábua de comutação.	50
6.6	Parâmetros do exemplo 1.	51
6.7	Prémio de seguros de vida a tempo discreto.	51
6.8	Prémio de seguro de vida (discreto) a partir das funções do pacote <i>lifecon-</i> <i>tingencies</i>	52
6.9	Variação dos prémios por idade	55
6.10	Prémio de seguro vida inteira a tempo contínuo aproximado.	57
6.11	Prémio de seguro dotal a tempo contínuo aproximado.	58
6.12	Parâmetros do Exemplo 2.	59
6.13	Prémio para o seguro de duas vidas a tempo discreto.	59
6.14	Parâmetros do exemplo 3.	60
6.15	Seguros de vida a tempo contínuo pela lei de <i>Gompertz-Makeham</i>	61

Lista de Tabelas

4.1	Exemplo da porção da tábua de mortalidade	26
6.1	Dados de tábuas de mortalidade existentes no pacote <i>lifecontingencies</i> . . .	48
6.2	Prémios por idade	55

Glossário

- **Segurador(a):** A empresa ou entidade que emite a apólice de seguro de vida e se compromete a pagar o benefício em caso da ocorrência do sinistro.
- **Segurado:** A pessoa cuja vida está coberta pelo seguro de vida.
- **Seguro de vida:** contrato através do qual a seguradora se compromete pagar o benefício de seguro em caso da morte da pessoa segurada (seguro em caso de morte) ou sobrevivência da pessoa segurada (seguro em caso de vida).
- **Apólice de seguro:** Documento que contém as condições e os termos do contrato de seguro acordadas pelas partes incluindo coberturas e exclusões.
- **Benefício:** O valor a ser pago pelo segurador aos beneficiários designados após a ocorrência do sinistro ou ao final do período do seguro
- **Beneficiário:** A pessoa ou entidade designada pelo segurado para receber o benefício do seguro em caso de acontecimento do sinistro.
- **Sinistro:** O evento coberto pela apólice de seguro que desencadeia o pagamento do benefício, como o falecimento ou sobrevivência do segurado.
- **Seguro de vida inteira:** Um tipo de seguro de vida que fornece cobertura durante toda vida do segurado, com o pagamento de um benefício garantido no momento da morte, independentemente de quando ocorrer.
- **Seguro de vida temporário:** Oferece a cobertura por um período específico (temporário). Se o segurado falecer durante esse período, o benefício é pago aos beneficiários.
- **Seguro dotal puro ou seguro dotal:** É um seguro de vida que garante o pagamento do benefício ao segurado, caso ele sobreviva até ao final de um prazo determinado. Se o segurado falecer durante o prazo, geralmente nenhum valor é pago.
- **Seguro dotal misto:** É um seguro de vida que garante o pagamento do benefício em duas situações: ao segurado caso ele sobreviva até ao final do prazo, ou aos beneficiários, caso ele falecer antes do prazo.

- **Prémio:** O valor pago pelo segurado ao segurador para manter a cobertura do seguro de vida. Pode ser pago numa única base (prémio único) ou em prestações periódicas.
- **Prémio único puro:** O valor calculado necessário para cobrir o custo de seguro, sem incluir margens de lucro ou despesas administrativas. É utilizado para determinar o valor actual necessário para pagar futuros benefícios do seguro.

Conteúdo

Didicatória	i
Declaração de Honra	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Abreviaturas e Siglas	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Glossário	ix
Conteúdo	xi
1 Introdução	2
1.1 Objectivos	3
1.1.1 Objectivo Geral	3
1.1.2 Objectivos Específicos	3
2 Teoria de Probabilidade e de Juros	4
2.1 Teoria de Probabilidades	4
2.2 Teoria de Juros	7
3 Modelos Actuarias de Sobrevivência	9
3.1 Variável Aleatória de Tempo de Vida Futuro	9
3.1.1 Força de Mortalidade	12
3.1.2 Notação Actuarial Internacional	16
3.1.3 Derivação da Média de T_x	17
3.2 Variável Aleatória do Tempo de Vida Curtado	18
3.2.1 Relação entre \hat{e}_x e e_x	19

3.3	Funções Para Múltiplas Vidas	20
3.3.1	Status de Vida Conjunta	20
3.3.2	Status de Último Sobrevivente	22
4	Tábuas de Mortalidade e de Comutação	25
4.1	Tábua de Mortalidade	25
4.1.1	Funções de Sobrevivência e Morte em Uma Tábua de Mortalidade .	26
4.1.2	Suposições da Idade Fraccionada	27
4.2	Tábua de Comutação	29
5	Modelos de Seguros de Vida	32
5.1	Seguros Contínuos Individuais	33
5.2	Seguros Discretos Individuais	36
5.3	Relações Entre os Modelos Contínuos e Discretos de Seguros Individuais .	40
5.4	Seguros de Múltiplas Vidas	42
5.4.1	Seguros Contínuos de Vida Conjunta	42
5.4.2	Seguros Contínuos de Último Sobrevivente	43
5.4.3	Seguros Discretos de Vida Conjunta	44
5.4.4	Seguros Discretos de Último Sobrevivente	45
6	Aplicação do Software R Para o Cálculo do Prémio em Seguro de Vida	47
6.1	Configurações Iniciais	47
6.2	Construção da tábua de mortalidade	48
6.3	Construção da Tábua de Comutação	49
6.4	Cálculo do Prémio de Seguro de Vida	50
6.4.1	Seguros Discretos Individuais	50
6.4.2	Interpretação e Análise Crítica dos Prémios em Função a Idade para Diferentes Coberturas de Seguros de Vida	52
6.4.3	Aproximação de Seguros Contínuos por Meio da Suposição Uni- forme de Mortes	57
6.4.4	Seguros Discretos Para Múltiplas Vidas	58
6.4.5	Modelos Contínuos Pela Lei de <i>Gompertz-Makeham</i>	60
7	Conclusão	62
	Bibliografia	64

1 Introdução

A matemática de seguros, também conhecida como matemática actuarial, é uma disciplina que aplica métodos matemáticos, estatísticos e financeiros para avaliar e gerir os riscos associados aos seguros. Esta área é essencial para a precificação de seguros de vida, bem como para o cálculo de benefícios em fundos de pensão e outras análises relacionadas à avaliação de rendas que envolvam risco, incerteza ou aleatoriedade. A aleatoriedade ou incerteza, é um elemento central no cálculo de prémios de seguros, uma vez que os eventos futuros são imprevisíveis [4]. No ensino do cálculo de prémios de seguros no ramo vida, são consideradas duas abordagens de aleatoriedade: a contínua e a discreta. A abordagem contínua utiliza o estudo de funções contínuas e o cálculo diferencial e integral para modelar os prémios, enquanto a abordagem discreta utiliza séries e somatórios para realizar os cálculos.

O cálculo de prémios de seguros de vida é de suma importância, tanto para as seguradoras quanto para os segurados. Ele determina o valor que o segurado deve pagar, seja em parcela única ou em várias prestações, para obter a cobertura oferecida pela seguradora [15]. Esse cálculo é fundamental para garantir a estabilidade financeira aos beneficiários em caso de sinistro e para assegurar a sustentabilidade financeira das seguradoras, que precisam cobrar valores adequados para cobrir as suas obrigações, mantendo assim a solvência e a lucratividade [6].

O cálculo de prémio de seguro de vida envolve modelos matemáticos que levam em consideração factores como a idade dos segurados, as taxas de mortalidade, o tipo de seguro (individual ou em grupo), as taxas de juros aplicáveis e o tempo da cobertura do seguro, que pode ser de vida inteira, temporária ou dotal. O cálculo de prémio também deve considerar a data do pagamento da indemnização, que pode ser imediata, anual ou outra periodicidade acordada no contrato.

Este cálculo é uma tarefa que envolve a análise complexa de grandes volumes de dados, aplicação de modelos actuariais sofisticados e consideração de diversas variáveis económicas e demográficas. Para lidar melhor com a complexidade dos cálculos actuariais, o uso de *softwares* para a análise de dados tem-se tornado cada vez mais comum tanto no meio académico quanto no profissional. Entre os diversos *softwares* estatísticos, destaca-se o uso de *R*, amplamente adoptado em instituições de ensino superior públicas por ser gratuito, de fácil acesso, colaborativo e por conter pacotes específicos para os cálculos actuariais [5]. No *R* existem alguns pacotes criados para o cálculo actuarial, a maioria estão voltados para seguros de não vida. No entanto, destaca-se o pacote *lifecontingencies*, desenvolvido especialmente para o cálculo actuarial de seguros de vida

a tempo discreto[16].

A pesquisa pretende descrever matematicamente os modelos de precificação de prémios em seguros de vida individual e múltiplas vidas (com foco específico em seguros para duas vidas), e, em seguida, implementar esses modelos manualmente no *software R* com o suporte do pacote *lifecontingencies*. A principal contribuição da pesquisa consiste na apresentação de modelos de precificação mais precisos e adaptados aos seguros de vida, contribuindo para a análise dos prémios em diferentes tipos de seguros, vida inteira, temporário e dotais, considerando o factor idade dos segurados. Isso permite uma avaliação detalhada e precisa do impacto da idade na determinação dos prémios.

O primeiro capítulo corresponde a introdução. O segundo capítulo revisa os conceitos básicos das teorias de probabilidade e de juros, que constituem a base necessária para a compreensão deste trabalho. No capítulo 3, apresentamos os modelos de sobrevivência, com o foco na definição de expectativa de vida, da força de mortalidade e das probabilidades associadas aos seguros, essenciais para o cálculo do prémio de seguro de vida. No capítulo 4, introduzimos as tábuas de mortalidade e de comutação, que simplificam e convertem as probabilidades de morte e sobrevivência em valores facilmente manipuláveis. No capítulo 5, detalhamos o cálculo do prémio de seguro de vida. O capítulo 6 aplica este cálculo utilizando o *software R*, e no último capítulo apresentamos as considerações finais e recomendações.

1.1 Objectivos

1.1.1 Objectivo Geral

Descrever e implementar modelos actuariais para o cálculo do prémio em seguros de vida, utilizando *software R*.

1.1.2 Objectivos Específicos

- Descrever os modelos de sobrevivência utilizados na avaliação do risco em seguros de vida;
- Explicar o uso de tábuas de mortalidade e princípios de comutação no cálculo de prémios em seguros de vida;
- Descrever os modelos matemáticos para o cálculo do prémio em seguros de vida;
- Determinar e analisar os prémios em função da idade para diferentes tipos de coberturas;
- Implementar os modelos utilizando o *software R*.

2 Teoria de Probabilidade e de JUROS

A teoria de probabilidades e a teoria das taxas de juros são dois pilares fundamentais na matemática aplicada e nas ciências económicas. Embora distintos em seus objectivos e aplicações, ambos compartilham a essência do raciocínio quantitativo e da análise da incerteza.

Neste capítulo revisamos os conceitos básicos e a notação das teorias de probabilidade e de juros. Esta revisão será feita na base dos seguintes manuais, [1], [10], [11], [19] e [15].

2.1 Teoria de Probabilidades

Definição 2.1.1. (*Espaço amostral*) é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e é representado por Ω . Ele pode ser enumerável finito ou infinito, se pode ser colocado em correspondência biunívoca com os números naturais. Caso contrário, será não enumerável, como a recta real.

Definição 2.1.2. (σ -álgebra) - uma classe de conjunto de Ω representada por \mathcal{F} é denominada σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Se apenas a união finita está em \mathcal{F} temos uma classe mais restrita, denominada álgebra.

Definição 2.1.3. (*Probabilidade*) uma função P , definida na σ -álgebra \mathcal{F} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os seguintes axiomas:

- $P(\Omega) = 1$;
- Para todo subconjunto $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;
- Para toda sequência $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, mutuamente exclusivos, temos

$$P \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

O espaço denotado por (Ω, \mathcal{F}, P) - é denominada espaço de probabilidade. Os subconjuntos que estão em \mathcal{F} são denominados eventos e é somente a eles que se atribui probabilidade.

Definição 2.1.4. (*Probabilidade condicional*) considere os eventos A e B em (Ω, \mathcal{F}, P) . Sendo $P(B) > 0$, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B , é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (2.1)$$

caso $P(B) = 0$, a probabilidade condicional é indefinida.

Definição 2.1.5. (*Variável aleatória*) seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, denominamos de variável aleatória, qualquer função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$X^{-1}(I) = \{t \in \Omega : X(t) \in I\} \in \mathcal{F},$$

para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Em outras palavras, X é tal que a sua imagem inversa de intervalos $I \subset \mathbb{R}$ pertencem a σ -álgebra.

Definição 2.1.6. (*Função de distribuição acumulada*) sendo X uma variável aleatória em (Ω, \mathcal{F}, P) sua função de distribuição acumulada é definida por

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P[X \leq x], \quad (2.2)$$

com x percorrendo todos os reais.

Propriedades da função de distribuição acumulada

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;
- F é contínua à direita;
- F é não decrescente, isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y, \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- A probabilidade de eventos que correspondem a intervalos da forma $a < X \leq b$ com $a < b$, podem ser expressos em termos da função de distribuição acumulada:

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a). \quad (2.3)$$

Definição 2.1.7. (*Variável aleatória discreta*) uma variável aleatória X é classificada como discreta, se a sua imagem I é um subconjunto numerável do conjunto dos números reais, pode ser finito ou infinito, ($I \subset \mathbb{R}$).

Definição 2.1.8. (*Função massa de probabilidade*) a função massa de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos valores x_1, x_2, \dots , para $i = 1, 2, \dots$, denotada por $p(x_i)$

$$p(x_i) = P[X = x_i] = P(t \in \Omega : X(t) = x_i).$$

Propriedades da função massa de probabilidade

A função massa de probabilidade de X em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ satisfaz:

- $0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots;$
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

Definição 2.1.9. (*Variável aleatória contínua*) uma variável aleatória X é classificada como contínua, se a sua imagem I é um subconjunto inumerável do conjunto dos números reais, pode ser finito ou infinito, ($I \subset \mathbb{R}$).

Definição 2.1.10. (*Função densidade de probabilidade*), a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X se existir é definida por

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \tag{2.4}$$

$F_X(x)$ é a função de distribuição acumulada.

Propriedades da função densidade

A derivada da $F_X(x)$, quando existir, é positiva desde que $F_X(x)$ é uma função não decrescente, então:

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1;$
- $F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt,$ para todo $x \in \mathbb{R};$
- $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx.$

Definição 2.1.11. (*Esperança de variáveis aleatórias*)

- (Para variável aleatória discreta X) sejam $x_1, x_2, \dots, x_k,$ os valores que X pode assumir, a esperança de uma variável aleatória discreta é definida por

$$E[X] = \sum_{i=1}^k x_i P[X = x_i]. \tag{2.5}$$

- (Para variável aleatória contínua X) a esperança de uma variável aleatória contínua é definida por

$$E[X] = \int_{-\infty}^x t f(t)dt. \tag{2.6}$$

Definição 2.1.12. (*Esperança de uma função de variáveis aleatórias (variável aleatória composta)*) seja X uma variável aleatória e $g(\bullet)$ uma função, ambos com o domínio e contradomínio real. O valor esperado do valor (esperança) da função $g(X)$, denotado por $E[g(X)]$ é definido por:

- (X - uma variável aleatória discreta)

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^k g(x_i)P[X = x_i]. \quad (2.7)$$

- (X - uma variável aleatória contínua)

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^x g(t)f(t)dt. \quad (2.8)$$

Propriedades da esperança da variável aleatória

Seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ um conjunto de variáveis aleatórias, tal que $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$ e, $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$E[aX_n + b] = aE[X_n] + b, \quad (2.9)$$

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]. \quad (2.10)$$

2.2 Teoria de Juros

Definição 2.2.1. (*Taxa anual de juros efectiva*) da matemática financeira, seja i a taxa de juros constante, $i > 0$, a taxa de juros anual efectiva, denotado por v é dada por

$$v = \frac{1}{1+i}. \quad (2.11)$$

Definição 2.2.2. (*Força de juros por ano*) a força de juros por ano é denotado por δ , e é dada por

$$\delta = \ln(1+i). \quad (2.12)$$

A igualdade (2.12) equivale a

$$1+i = e^\delta.$$

A igualdade (2.11) equivale a $1+i = \frac{1}{v}$, e substituindo na equação anterior obtemos

$$\frac{1}{v} = e^\delta,$$

portanto,

$$\boxed{v = e^{-\delta}}. \quad (2.13)$$

δ - é conhecido como taxa de juros continuamente composta. Em contextos da Matemática Financeira e de finanças corporativas, em particular se a taxa de juros é assumida sem risco, a notação comum para a taxa de juros continuamente composta é r .

Definição 2.2.3. (*Taxa efectiva de desconto*) a taxa efectiva de desconto, denotado por d , é definido por

$$d = iv = 1 - v. \quad (2.14)$$

De (2.13), a taxa efectiva de desconto pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\boxed{d = 1 - e^{-\delta}}. \quad (2.15)$$

Definição 2.2.4. (*Factor de desconto*) seja i uma taxa de juros composta e capitalizada periodicamente (por exemplo, ao ano), um factor de desconto que calcula o valor presente de uma unidade monetária descontada em t -períodos (por exemplo, t -anos) é dado por

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t} \quad (2.16)$$

Definição 2.2.5. (*Valor Presente*) seja v^t o factor de desconto, o valor presente, denotado por VP , de S unidades monetárias a serem pagos dentro de t -períodos (por exemplo, t -anos) é dado por

$$VP = Sv^t = S \left(\frac{1}{1+i} \right)^t. \quad (2.17)$$

3 Modelos Actuariais de Sobrevivência

Em ciências actuariais é importante investigar a respeito da vida futura de indivíduos com o objectivo de definir sua expectativa de vida e as probabilidades associadas de morte e sobrevivência. Dada a incerteza sobre o tempo de vida futuro, este é tratado como uma variável aleatória. A partir dessa abordagem, é possível estimar a distribuição de probabilidade correspondente, o que permite o cálculo das probabilidades de morte e sobrevivência de indivíduos em análise. Essas informações são essenciais para a definição do valor de apólice de seguros ou contratos de pensões. Para tal, é necessário estudar o modelo de mortalidade da população à qual o indivíduo do interesse pertence. Com base nesse modelo, torna-se possível calcular a expectativa de vida da pessoa, bem como sua probabilidade de falecer em uma determinada idade durante o período de vigência do contrato de seguro.

Neste capítulo, abordaremos a modelagem do tempo de vida futuro como uma variável aleatória, mostrando como calcular as probabilidades de morte e sobrevivência dentro desse contexto. A seguir definiremos a força de mortalidade, uma quantidade fundamental na modelagem da mortalidade, e introduziremos as principais notações actuariais. Também apresentaremos a variável aleatória de tempo de vida curtado, que representa o número de anos completos de vida futura, explicando a sua utilidade e derivando sua distribuição de probabilidade. Por fim estenderemos a análise para incluir modelos aplicáveis a vidas múltiplas.

3.1 Variável Aleatória de Tempo de Vida Futuro

A variável aleatória que representa o tempo de vida futuro é uma das principais variáveis utilizadas em matemática actuarial. De acordo com Bowers et al. [2], Dickson et al. [4] e Rotar [14], segue-se a definição:

Definição 3.1.1. *De acordo com o notação actuarial padrão, o símbolo (x) denota “uma pessoa de idade x ”, tal que x é medido em anos e $x \geq 0$. Para esse indivíduo, dado que ele tem x anos, seu tempo de vida futuro é designado pela variável aleatória contínua T_x , de modo que $x + T_x$ é a variável aleatória que representa idade com a qual (x) terá no momento da sua morte. Sendo T_x uma variável aleatória, a sua função de distribuição de probabilidade acumulada é dada por:*

$$F_x(t) = P[T_x \leq t]. \tag{3.1}$$

A equação (3.1) representa a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x+t$. Assim, $F_x(t)$ denota a probabilidade de (x) não sobreviver além da idade $x+t$, sendo $F_x(t)$ conhecida como a função de distribuição do tempo de vida, conforme mencionado por Dickson et al. [4].

Além disso, em ciências actuariais, uma função de grande interesse na análise de modelos de sobrevivência é a função complementar de $F_x(t)$, definida como:

Definição 3.1.2. *O complemento de $F_x(t)$, denotado por $S_x(t)$, define-se como a função de sobrevivência da variável aleatória T_x , dada por:*

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = P[T_x > t]. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) indica a probabilidade de (x) sobreviver até, pelo menos, a idade $x+t$.

Dada a interpretação da coleção de variáveis aleatórias $\{T_x\}_{x \geq 0}$, que representam o tempo de vida futuro de indivíduos, é necessário estabelecer a conexão entre qualquer par dessas variáveis. Consideremos T_0 e T_x para um indivíduo de idade x . A variável aleatória T_0 representa o tempo de vida de um recém-nascido, ou seja, o tempo de vida de um indivíduo que está na idade $x=0$. Se esse indivíduo morrer antes de atingir a idade x , a probabilidade desse evento é dada por $P[T_0 < x]$. Por outro lado, se ele sobreviver até a idade x , temos que $T_0 > x$, e o seu tempo de vida futuro é representado por T_x , enquanto sua idade ao falecer será $x+T_x$. Se (x) morrer em menos de t anos após de atingir a idade x , então $T_x < t$, e, portanto, $T_0 < x+t$. Isso nos leva a querer que os eventos $[T_x < t]$ e $[T_0 < x+t]$ sejam equivalentes, dado que o indivíduo sobrevive até a idade x . Alcançamos isso através da seguinte suposição para $x \geq 0$ e $t > 0$:

$$P[T_x \leq t] = P[T_0 \leq x+t \mid T_0 > x], \quad (3.3)$$

para um indivíduo que já tem idade x , a equação (3.3) indica que a probabilidade de falecer dentro dos próximos t anos, é equivalente à probabilidade de um recém-nascido dado que já sobreviveu até idade x e, morrer antes de atingir a idade $x+t$. A equação (3.3) fornece, assim, uma maneira alternativa de interpretar a equação (3.1).

Aplicando a definição da probabilidade condicional na equação (3.3), temos:

$$P[T_x \leq t] = \frac{P[x < T_0 \leq x+t]}{P[T_0 > x]}. \quad (3.4)$$

A partir de (3.1), (3.2) e pela propriedade (2.3) obtém-se,

$$F_x(t) = \frac{F_o(x+t) - F_o(x)}{S_o(x)}, \quad (3.5)$$

utilizando a relação $F_x(t) = 1 - S_x(t)$, a equação (3.5) torna-se:

$$1 - S_x(t) = \frac{1 - S_o(x+t) - 1 + S_o(x)}{S_o(x)} = \frac{S_o(x) - S_o(x+t)}{S_o(x)} = 1 - \frac{S_o(x+t)}{S_o(x)},$$

e fazendo pequenas manipulações algébricas, obtemos o seguinte resultado

$$S_x(t) = \frac{S_o(x+t)}{S_o(x)}, \quad (3.6)$$

ao multiplicarmos ambos os lados da igualdade (3.6) por $S_o(x)$ obtemos

$$\boxed{S_o(x+t) = S_o(x) \cdot S_x(t)}. \quad (3.7)$$

Essa equação (3.7) estabelece que a probabilidade de um indivíduo, ao nascer, sobreviver até a idade $x+t$ é igual à probabilidade de ele sobreviver até a idade x e então, dado isso, sobreviver da idade x até a idade $x+t$. Este resultado, no âmbito da matemática de seguros e rendas é conhecido como a regra da multiplicação [13, 7].

De forma similar, qualquer probabilidade de sobrevivência para um indivíduo com idade x , por exemplo, $t+u$ anos, pode ser decomposta na probabilidade de sobreviver os primeiros t anos e, em seguida, dada a sobrevivência até a idade $t+x$, sobreviver por mais u anos. Essa relação é expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_x(t+u) &= \frac{S_o(x+t+u)}{S_o(x)} \\ \Rightarrow S_x(t+u) &= \frac{S_o(x+t)}{S_o(x)} \cdot \frac{S_o(x+t+u)}{S_o(x+t)} \\ \Rightarrow \boxed{S_x(t+u) = S_x(t) \cdot S_{x+t}(u)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nesta equação (3.8), $S_x(t+u)$ representa a probabilidade de um indivíduo, actualmente com idade x , sobreviver até a idade $x+t+u$. Isso é igual a probabilidade de o indivíduo sobreviver até a idade $x+t$, e então, dado isso sobreviver da idade $x+t$ até a idade $x+t+u$.

Qualquer função de sobrevivência associada à distribuição do tempo de vida futuro deve satisfazer as seguintes condições:

Condição 1. $S_x(0) = 1$, a probabilidade de uma vida, actualmente com idade x , sobreviver por 0 anos é igual a 1;

Condição 2. $\lim_{t \rightarrow \infty} S_x(t) = 0$, todas as vidas eventualmente morrem;

Condição 3. A função de sobrevivência deve ser uma função não decrescente de t , isto é, não pode ser provável que (x) sobreviva, digamos, 10.5 anos do que 10 anos, porque para sobreviver 10.5 anos deve primeiro sobreviver 10 anos.

Com a distribuição utilizada são consideradas três suposições adicionais:

Suposição 1.1 $S_x(t)$ é diferenciável para todo $t > 0$;

Suposição 1.2 $\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot S_x(t) = 0$;

Suposição 1.3 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \cdot S_x(t) = 0$.

Essas suposições garantem a existência da média e variância da distribuição T_x .

3.1.1 Força de Mortalidade

A força de mortalidade é um conceito importante e fundamental na modelagem do tempo de vida futuro.

Definição 3.1.1.1. Segundo Dickson et al. [4] e MacDonald et al. [8], a taxa de risco ou força de mortalidade na idade x , associada à variável aleatória de tempo de vida futuro T_x , denotada por μ_x , é definida como:

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P[T_o \leq x + \Delta x \mid T_o > x]}{\Delta x}. \quad (3.9)$$

Para a melhor compreensão, a equação (3.9) pode ser aproximada por:

$$\mu_x \Delta x \approx P[T_o \leq x + \Delta x \mid T_o > x], \quad (3.10)$$

para valores muito pequenos de Δx , essa aproximação descreve a taxa de mortalidade como a probabilidade de uma vida recém nascida que atingiu a idade x morrer antes de atingir a idade $x + \Delta x$.

A partir da equação (3.1), uma forma equivalente de definir a força de mortalidade μ_x é:

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P[T_x \leq \Delta x]}{\Delta x}.$$

Esta expressão pode ser reescrita em termos da função de sobrevivência S_x como:

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - S_x(\Delta x))}{\Delta x}. \quad (3.11)$$

Note que a força de mortalidade depende numericamente da unidade de tempo. Se o tempo for medido em anos, então μ_x será medido em unidades de “por ano”.

Agora, relacionando a força de mortalidade na idade x com a função de sobrevivência a partir do nascimento, $S_o(x)$, temos que $S_x(\Delta x) = \frac{S_o(x + \Delta x)}{S_o(x)}$, substituindo na equação (3.11) obtemos

$$\mu_x = -\frac{1}{S_o(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{S_o(x + \Delta x) - S_o(x)}{\Delta x}. \quad (3.12)$$

A expressão $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{S_o(x + \Delta x) - S_o(x)}{\Delta x}$ é a definição da derivada da função $S_o(x)$, por-

tanto:

$$\mu_x = -\frac{1}{S_o(x)} \frac{d}{dx} S_o(x). \quad (3.13)$$

Sendo T_0 variável aleatória contínua, sua função densidade, denotada por $f_0(x)$, está relacionada à função de distribuição $F_0(x)$ e à função de sobrevivência $S_0(x)$ da seguinte forma:

$$f_0(x) = \frac{d}{dx} F_0(x) = \frac{d}{dx} (1 - S_0(x)) = -\frac{d}{dx} S_0(x),$$

portanto, segue da equação (3.13) que

$$\mu_x = \frac{f_o(x)}{S_o(x)}.$$

Podemos, também, relacionar a função da força de mortalidade em qualquer idade $x + t$, $t > 0$, à distribuição do tempo de vida futuro T_x . Suponha que x seja fixo e t seja uma variável. Então $d(x + t) = dt$ e assim,

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -\frac{1}{S_o(x+t)} \cdot \frac{d}{d(x+t)} S_o(x+t) \\ &= -\frac{1}{S_o(x+t)} \cdot \frac{d}{dt} S_o(x+t) \\ &= -\frac{1}{S_o(x+t)} \cdot \frac{d}{dt} S_o(x) \cdot S_x(t) \\ &= -\frac{S_o(x)}{S_o(x+t)} \cdot \frac{d}{dt} S_x(t) \\ &= -\frac{1}{S_x(t)} \cdot \frac{d}{dt} S_x(t), \end{aligned}$$

portanto,

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}, \quad (3.14)$$

essa relação fornece uma maneira de calcular μ_{x+t} , dada a função de sobrevivência $S_x(t)$.

Ao multiplicar a equação (3.14) por $S_x(t)$, obtemos a função densidade, que descreve a distribuição do tempo de vida futuro T_x para uma pessoa de idade x , dada a seguir:

$$\boxed{f_x(t) = S_x(t) \mu_{x+t}}. \quad (3.15)$$

Podemos também utilizar a equação (3.13) para desenvolver a fórmula de $S_x(t)$ em termos da função da força de mortalidade, μ_{x+t} , $0 \leq t \leq x$. Usamos o facto de que, para a função h cuja derivada existe, e onde $h(x) > 0$ para todo x , temos:

$$\frac{d}{dx} \ln(h(x)) = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} h(x).$$

A partir da equação (3.11), podemos reescrever a força de mortalidade μ_x como

$$\mu_x = -\frac{d}{dx} \ln(S_o(x)),$$

e integrando esta expressão no intervalo $(0, y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^y \mu_x dx &= \int_0^y -\frac{d}{dx} \ln S_o(x) dx \\ &= -(\ln S_o(y) - \ln S_o(0)). \end{aligned}$$

Sabemos que $\ln(S_o(0)) = \ln(P[T_0 > 0]) = \ln 1 = 0$. Portanto, temos

$$S_o(y) = e^{-\int_0^y \mu_x dx}.$$

Assim, para qualquer idade x , podemos escrever a função de sobrevivência $S_x(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \frac{S_o(x+t)}{S_o(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu_r dr}}{e^{-\int_0^x \mu_r dr}} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_r dr} \\ S_x(t) &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Isso significa que, se conhecemos a função μ_y para todo $y \geq 0$, então podemos calcular todas as probabilidades de sobrevivência $S_x(t)$, para qualquer x e t . Em outras palavras, a função da força de mortalidade descreve completamente a distribuição de tempo de vida, da mesma forma que função $S_o(x)$. Na verdade, muitas vezes é mais conveniente descrever a distribuição do tempo de vida usando a função da força de mortalidade do que a função de sobrevivência [4].

3.1.1.1 Leis da Mortalidade

Conforme vimos na equação (3.16), a distribuição de T_x pode ser determinada se conhecermos a força de mortalidade μ_y , para todo $y \geq x$ [4]. Isso levou ao desenvolvimento de várias distribuições para a vida futura, assumindo uma função matemática para a força de mortalidade. Historicamente, estas funções são denominadas leis da mortalidade e são consideradas funções de distribuição de probabilidade analítica, uma vez que expressam fórmulas simplificadas com um pouco número de parâmetros numéricos [6]. A inferência estatística é facilitada quando apenas alguns parâmetros precisam ser estimados, tornando estas leis especialmente úteis em contextos onde os dados disponíveis são escassos. Segundo Dickson et al. [4] descrevemos duas leis da Mortalidade amplamente aplicadas:

- **Lei de Gompertz**

A lei de Gompertz propõe uma expressão para a força de mortalidade μ_x na forma:

$$\boxed{\mu_x = Bc^x, \quad x > 0}$$

onde B e c são constantes tais que $B > 0$ e $c > 1$.

A partir da equação (3.16), podemos derivar a probabilidade de sobrevivência sob a lei de Gompertz, considerando que $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}$, obtemos

$$\begin{aligned} S_x(t) &= e^{-\int_0^t Bc^{(x+s)} ds} \\ &= e^{-Bc^x \int_0^t c^s ds}, \end{aligned}$$

ao calcular o integral $\int_0^t c^s ds = \left(\frac{c^s}{\ln(c)}\right)\Big|_0^t = \frac{1}{\ln(c)}(c^t - 1)$, obtemos

$$\boxed{S_x(t) = e^{\frac{Bc^x}{\ln(c)}(1-c^t)}}. \quad (3.17)$$

• **Lei de Gompertz-Makeham**

A lei de Gompertz-Makeham expande a lei de Gompertz ao adicionar um termo constante A , à força de mortalidade μ_x , introduzida por *Makeham* para representar um risco de mortalidade independente da idade. Assim, a força de mortalidade é dada por:

$$\boxed{\mu_x = A + Bc^x, \quad x > 0}, \quad (3.18)$$

onde A, B e c são constantes tais que $A, B > 0$ e $c > 1$.

De forma similar à lei de Gompertz, e com base na equação (3.16), podemos derivar a probabilidade de sobrevivência para a lei de Gompertz-Makeham, que resulta em:

$$\begin{aligned} S_x(t) &= e^{-\int_0^t (A+Bc^{(x+s)}) ds} \\ &= e^{-(A \int_0^t ds + Bc^x \int_0^t c^s ds)}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\boxed{S_x(t) = e^{\left(\frac{Bc^x}{\ln(c)}(1-c^t) - At\right)}}. \quad (3.19)$$

A força de mortalidade segundo a lei de Gompertz aumenta exponencialmente em função da idade, pois $c > 1$. Além disso, temos que $B > 0$, uma vez que a força de mortalidade deve ser positiva. Na lei de Gompertz-Makeham um termo constante é adicionado à força de mortalidade, projectado para reflectir o risco de morte acidental. Este termo constante, conhecido como coeficiente de Makeham, tem maior impacto em idades mais jovens, quando a força de mortalidade dependente da idade ainda é muito reduzida. Em idades mais avançadas o termo exponencial é o mais dominante. Ambos os modelos proporcionam frequentemente um bom ajuste aos dados de mortalidade em determinadas faixas etárias, particularmente da meia-idade até a velhice precoce.

A partir da equação (3.15), a função densidade para a lei de Gompertz-Makeham é dada por

$$\boxed{f_x(t) = S_x(t) \mu_{x+t} = e^{\left(\frac{Bc^x}{\ln(c)}(1-c^t) - At\right)} (A + Bc^{(x+t)})}. \quad (3.20)$$

3.1.2 Notação Actuarial Internacional

A notação utilizada nas secções anteriores $S_x(t)$, $F_x(t)$ e $f_x(t)$, é padrão em estatística. Existe uma notação actuarial internacional padrão que encapsula as probabilidades e as funções de maior valor e utilidade para os actuários, que foi adoptada a partir do Segundo Congresso Internacional de Actuários. Esse congresso aconteceu em Londres no ano de 1898 e a resposta fora apresentada visando unificar a linguagem actuarial, facilitando o entendimento entre os profissionais e simplificando a sua comunicação [17].

Nesta secção será introduzida essa notação como o equivalente actuarial para os modelos analisados nas secções anteriores e a partir de então seguiremos utilizando a notação apresentada nesta secção ou aquela adoptada nas secções anteriores, sempre que for conveniente, inserindo ao longo do texto, quando necessário novos elementos desse padrão. A notação da força de mortalidade μ_x , vem da notação actuarial internacional.

Definição 3.1.2.1. *A notação actuarial para as probabilidades de sobreviência e de morte é:*

$${}_tq_x = F_x(t) = P[T_x \leq t], \quad (3.21)$$

$${}_tp_x = S_x(t) = 1 - F_x(t) = P[T_x > t], \quad (3.22)$$

$${}_{u|t}q_x = P[u < T_x \leq u + t] = S_x(u) - S_x(u + t), \quad (3.23)$$

ou seja,

${}_tq_t$ o símbolo que indica a probabilidade de uma pessoa de idade x morrer entre as idades x e $x + t$,

${}_tp_x$ indica a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver até, pelo menos, a idade $x + t$,

${}_{u|t}q_x$ indica a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver u anos e depois morrer nos subsequentes t anos, isto é, morrer entre as idades $x + u$ e $x + u + t$.

Podemos simplificar a expressão ao eliminar t se o seu valor for 1. Assim, ${}_1p_x = p_x$ representa a probabilidade de (x) sobreviver até, pelo menos, a idade $x + 1$, enquanto ${}_1q_x = q_x$ a probabilidade de (x) morrer antes da idade $x + 1$. Na terminologia actuarial q_x é denominada taxa de mortalidade na idade x , e ${}_{u|t}q_x$ representa a probabilidade de morte deferida, isto é, a probabilidade de que a morte ocorra dentro de um intervalo de t anos após um período deferido de u anos.

As relações a seguir derivam-se directamente da definição acima e dos resultados anteriores deste capítulo:

$${}_tp_x + {}_tq_x = 1$$

$${}_{u|t}q_x = {}_up_x - {}_{t+u}p_x, \quad (3.24)$$

$${}_{t+u}p_x = {}_tp_x {}_up_{x+t} \text{ (de(3.8))}, \quad (3.25)$$

$$\mu_x = -\frac{1}{{}_0p_x} \cdot \frac{d}{dx} {}_0p_x \text{ (de(3.13)).} \quad (3.26)$$

Da mesma maneira, obtemos

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{{}_t p_x} \cdot \frac{d}{dt} {}_t p_x \Rightarrow \frac{d}{dt} {}_t p_x = -{}_t p_x \cdot \mu_{x+t}, \quad (3.27)$$

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \quad \text{(de (3.15)),} \quad (3.28)$$

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad \text{(de (3.16)).} \quad (3.29)$$

3.1.3 Derivação da Média de T_x

Consideremos a esperança de tempo de vida futuro de (x) , denotada por $E[T_x]$ e representada em notação actuarial por \dot{e}_x , denominada de **expectativa completa de vida**. Observando as equações (3.27) e (3.28), temos que:

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} {}_t p_x. \quad (3.30)$$

A partir da definição do valor esperado de uma variável aleatória contínua, temos que

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \int_0^\infty t f_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty t {}_t p_x \mu_{x+t} dt, \end{aligned}$$

utilizando a igualdade (3.30), e calcular a integral, pela integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= -\int_0^\infty t \cdot \frac{d}{dt} {}_t p_x dt \\ &= -\left(t \cdot {}_t p_x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty {}_t p_x dt \right) \\ &= -\left(t \cdot {}_t p_x \Big|_{(t=\infty)} - 0 - \int_0^\infty {}_t p_x dt \right), \end{aligned}$$

a expressão $(t \cdot {}_t p_x \Big|_{(t=\infty)})$ pode ser reformulada em termos do limite de uma função. Assim, temos $\lim_{t \rightarrow \infty} (t \cdot {}_t p_x)$, o que permite reescrever a expectativa completa de vida como:

$$\dot{e}_x = -\left(\lim_{t \rightarrow \infty} (t \cdot {}_t p_x) - \int_0^\infty {}_t p_x dt \right).$$

De acordo com a suposição (2) apresentada na secção (1.1), sabemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} (t \cdot {}_t p_x) = 0$, o que implica:

$$\boxed{\dot{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt}. \quad (3.31)$$

Esta expressão final representa a expectativa de vida completa em termos de uma integral da função de sobrevivência.

3.2 Variável Aleatória do Tempo de Vida Curtado

No cálculo de seguros e anuidades, ao utilizar a metodologia discreta é necessário definir uma variável aleatória que represente a parte inteira de T_x , que é denotada por K_x , e definida como:

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor, \quad (3.32)$$

onde o símbolo $\lfloor \cdot \rfloor$ indica que somente a parte inteira de T_x é capturada. Dessa forma, K_x é uma variável aleatória discreta do tempo de vida curtado, ou seja, o número de anos completos vividos no futuro por (x) .

Para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, a distribuição de probabilidade de K_x é dada simbolicamente por:

$$P[K_x = k] = P[k \leq T_x < k + 1], \quad (3.33)$$

o que representa a probabilidade de (x) sobreviver k anos e morrer antes de completar $x + k + 1$ anos. Usando a igualdade em (1.3), a expressão acima pode ser reescrita como:

$$P[K_x = k] = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x,$$

utilizando a igualdade (3.25) para reescrever ${}_{k+1} p_x$ como ${}_k p_x \cdot p_{x+k}$ e, em seguida, pondo ${}_k p_x$ em evidência, temos que

$$P[K_x = k] = {}_k p_x - {}_k p_x p_{x+k} = {}_k p_x (1 - p_{x+k}),$$

considerando a identidade ${}_t p_x + {}_t q_x = 1$ vista anteriormente, temos que $p_{x+k} + q_{x+k} = 1$ e isolando q_{x+k} e substituindo na última igualdade obtemos a definição seguinte, de acordo com Dickson et al. [4] e Cunningham et al. [3]:

Definição 3.2.1. *Seja $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ uma variável aleatória obtida a partir do truncamento de T_x denominada tempo de vida curtado, sua função de probabilidade de (x) viver k anos e morrer antes de completar $x + k + 1$ anos, é dada por*

$$\boxed{P[K_x = k] = {}_k p_x q_{x+k} = {}_k |q_x}. \quad (3.34)$$

O valor esperado da variável aleatória discreta K_x , denotado por e_x , é referido como expectativa de anos inteiros de vida, pois representa a quantidade esperada de anos inteiros

de vida. Este valor esperado é deduzido a seguir:

$$\begin{aligned}
 E[K_x] = e_x &= \sum_{k=0}^{\infty} kP[K_x = k] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k(kp_x - {}_{k+1}p_x) \\
 &= (1p_x - 2p_x) + 2(2p_x - 3p_x) + 3(3p_x - 4p_x) + \dots \\
 &= 1p_x - 2p_x + 2_2p_x - 2_3p_x + 3_3p_x - 3_4p_x + 4_4p_x - 4_5p_x + \dots \\
 &= 1p_x + 2p_x + 3p_x + 4p_x + 5p_x + \dots,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{e_x = \sum_{k=1}^{\infty} kp_x}, \quad (3.35)$$

observe que o limite inferior do somatório é $k = 1$.

3.2.1 Relação entre \dot{e}_x e e_x

Considerando que os anos inteiros de vida futura correspondem a parte inteira de tempo de vida futuro, surge naturalmente a questão sobre a existência de uma relação entre \dot{e}_x e e_x . Podemos obter uma relação aproximada escrevendo:

$$\dot{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} {}_t p_x dt. \quad (3.36)$$

Se aproximarmos cada integral da soma acima (fórmula (1.31)) pela regra de trapézio para a integração numérica, obtemos

$$\int_j^{j+1} {}_t p_x dt \approx \frac{j+1-j}{2} ({}_j p_x + {}_{j+1} p_x) = \frac{1}{2} ({}_j p_x + {}_{j+1} p_x),$$

substituindo em (3.36), obtemos

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_x &\approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2} ({}_j p_x + {}_{j+1} p_x) \\
 &= \frac{1}{2} ({}_0 p_x + 2_1 p_x + 2_2 p_x + 2_3 p_x + 2_4 p_x + \dots) \\
 &= \frac{1}{2} \left({}_0 p_x + 2 \sum_{j=1}^{\infty} {}_j p_x \right),
 \end{aligned}$$

como ${}_0 p_x$ representa a probabilidade de (x) sobreviver por 0 anos, então ${}_0 p_x = 1$. Dessa forma, temos:

$$\boxed{\dot{e}_x \approx \frac{1}{2} + e_x}. \quad (3.37)$$

Assim, a expectativa de vida completa na idade x é aproximadamente igual à expectativa de vida de anos inteiros acrescida de meio ano. Isso equivale à suposição de que as vidas que terminam entre as idades $(x + k)$ e $(x + k + 1)$ o fazem, em média, a meio ano de idade, ou seja, $(x + k + \frac{1}{2})$. Esta suposição é conhecida como hipótese de distribuição uniforme de morte.

É importante destacar que, embora a variável aleatória do tempo de vida futuro curtado K_x , seja igual a parte inteira do tempo de vida futuro completo de T_x , a expectativa de vida em anos inteiros e_x , não é simplesmente a parte inteira da expectativa de vida completa \dot{e}_x .

3.3 Funções Para Múltiplas Vidas

Considere um grupo de m vidas, cada uma com idades iniciais x_1, x_2, \dots, x_m . Para simplificar a notação, denotaremos o tempo de vida futuro da k -ésima vida por $T(x_k)$, onde k varia de 0 a m . Com base nessas vidas, definimos um status u , que corresponde a uma condição específica (por exemplo, todas as vidas ainda estarem vivas). Denotaremos o tempo de vida futuro deste status por $T(u)$. Denotemos por exemplo ${}_t p_u$ a probabilidade condicional de que o status u ainda esteja intacto no tempo t , dado que o status existia no tempo $t = 0$. Os símbolos ${}_t q_u$, μ_{u+t} , etc, são definidos de maneira semelhante ao que nas secções anteriores.

3.3.1 Status de Vida Conjunta

O Status de vida conjunta envolve várias vidas individuais, sendo que a continuidade do status depende da sobrevivência de todas as vidas envolvidas. O status de vida conjunta falha com a ocorrência do primeiro falecimento de qualquer uma das vidas componentes. Formalmente, o status de vida conjunta por m vidas com idades iniciais x_1, x_2, \dots, x_m é representado pela notação $x_1 : x_2 : \dots : x_m$ ou por $x_1 x_2 \dots x_m$ [2, 6]. No contexto deste estudo, vamos considerar o par de vidas com idades x e y conforme abordado em [4] e [13], onde a notação utilizada é (xy) ou $(x : y)$. Neste contexto, as funções de vida conjunta, são analisadas, diferenciando-se entre funções contínuas e discretas, para fins de cálculo de prêmios de seguros de vida.

3.3.1.1 Funções Contínuas de Vida Conjunta

As funções contínuas de vida conjunta são obtidas em termos da variável aleatória do tempo de vida futuro. No status de vida contínua, as duas vidas são consideradas como uma única entidade, que existe enquanto ambas estiverem vivas, e que falha com a morte da primeira delas. Nesse caso, a variável aleatória que representa o tempo até a falha do status indica o tempo de espera a partir de agora até uma das duas pessoas, seja (x) ou (y) , morrer. Essa variável aleatória é denotada por $T_{(xy)}$, e equivale ao menor tempo de

vida futuro entre as duas pessoas, (T_x, T_y) , ou seja,

$$T_{(xy)} = \min\{T_x, T_y\} = \begin{cases} T_x & T_x \leq T_y \\ T_y & T_x > T_y \end{cases}. \quad (3.38)$$

A existência do status de vida conjunta requer a sobrevivência de todas as vidas componentes durante t anos, de forma que o evento $T_{(xy)} > t$ ocorra. Este evento corresponde à intersecção de dois eventos independentes: $T_x > t$, que representa a sobrevivência da vida (x) durante t anos, e $T_y > t$, que representa a sobrevivência da vida (y) durante o mesmo período. A probabilidade de que ambas as vidas (x) e (y) estejam vivas após t anos é dada por:

$${}_t p_{xy} = P[T_{(xy)} > t] = P[T_x > t \cap T_y > t] = P[T_x > t]P[T_y > t],$$

ou seja,

$$\boxed{{}_t p_{xy} = {}_t p_x {}_t p_y}. \quad (3.39)$$

A probabilidade de que pelo menos uma das vidas $((x)$ e $(y))$ esteja morta dentro de t anos, é dada por:

$${}_t q_{xy} = 1 - {}_t p_{xy}. \quad (3.40)$$

Expandindo ${}_t p_{xy}$, em termos das probabilidades individuais, temos:

$${}_t q_{xy} = 1 - {}_t p_x {}_t p_y,$$

utilizando as relações entre probabilidade de sobrevivência e de morte para cada vida, obtemos:

$$\begin{aligned} {}_t q_{xy} &= 1 - (1 - {}_t q_x)(1 - {}_t q_y) \\ &= 1 - (1 - {}_t q_x - {}_t q_y + {}_t q_x {}_t q_y), \end{aligned} \quad (3.41)$$

assim, a expressão final para ${}_t q_{xy}$, em termos das probabilidades de morte individuais é:

$$\boxed{{}_t q_{xy} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_x {}_t q_y}. \quad (3.42)$$

Para determinar a função densidade de $T_{(xy)}$, consideremos a derivada da probabilidade de sobrevivência conjunta, ${}_t p_{xy}$ em relação ao tempo t :

$$\begin{aligned} f_{T_{(xy)}}(t) &= -\frac{d}{dt} {}_t p_{xy} \\ &= -\frac{d}{dt} ({}_t p_x {}_t p_y) \\ &= -\left(\frac{d}{dt} {}_t p_x\right) {}_t p_y - \left(\frac{d}{dt} {}_t p_y\right) {}_t p_x \quad (\text{a partir de 3.30}) \\ &= {}_t p_x \mu_{x+t} {}_t p_y + {}_t p_y \mu_{y+t} {}_t p_x \end{aligned}$$

portanto, a função densidade de $T_{(xy)}$ é dada por:

$$\boxed{f_{T_{(xy)}}(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_{xy} = {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})}. \quad (3.43)$$

3.3.1.2 Funções Discretas de Vida Conjunta

As funções discretas associadas ao status de vida conjunta baseiam-se na variável aleatória de tempo vida curtado. De forma análoga ao caso de uma única vida, o tempo de vida futuro curtado para o status (xy) representa o número de anos completos vividos por (x) e (y) até a ocorrência da primeira morte. Essa variável é expressa por $K_{(xy)} = \lfloor T_{(xy)} \rfloor$, onde $\lfloor T_{(xy)} \rfloor$ denota a parte inteira de $T_{(xy)}$, que corresponde ao tempo de vida contínuo até a primeira morte. Da maneira similar à dedução da equação (3.34), a distribuição de probabilidade de $K_{(xy)} = k$ é dada por:

$$P[K_{(xy)} = k] = {}_k p_{xy} q_{x+k:y+k} = {}_k p_x {}_k p_y q_{x+k:y+k}, \quad (3.44)$$

onde, ${}_t p_{xy}$ representa a probabilidade de sobrevivência conjunta das vidas (x) e (y) até o ano k , e, $q_{x+k:y+k}$ a probabilidade de morte de pelo menos umas das vidas dentro de um ano, e pode ser expressa em termos de probabilidades de morte dentro de um ano das vidas individuais da seguinte forma:

$$q_{x+k:y+k} = 1 - p_{x+k:y+k} = q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}, \quad (3.45)$$

substituindo a expressão de $q_{x+k:y+k}$ da equação (3.45) na equação (3.44), obtemos:

$$\boxed{P[K_{(xy)} = k] = {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}) = {}_k |q_{xy}}. \quad (3.46)$$

Esta expressão representa a probabilidade de que a primeira morte ocorra entre os anos k e $k + 1$, considerando que ambas as vidas sobreviveram conjuntamente até o ano k .

3.3.2 Status de Último Sobrevivente

O status de último sobrevivente termina com a morte do último membro do grupo, e continua enquanto pelo menos um dos membros permanecer vivo. Esse status deixa de existir apenas quando todos os seus membros falecem. O status de último sobrevivente é representado por $(\overline{x_1 x_2 \cdots x_m})$, envolvendo m vidas com idades x_1, x_2, \cdots, x_m . De forma semelhante ao discutido anteriormente, estamos interessados num par de vidas (x) e (y) , com idades actuais x e y , neste caso, o status é representado por (\overline{xy}) ou $(\overline{x:y})$.

3.3.2.1 Funções Contínuas de Último Sobrevivente

As funções contínuas relacionadas ao status de último sobrevivente são obtidas considerando a distribuição da variável aleatória do tempo até à falha desse status. A variável

aleatória do tempo até a falha no status de último sobrevivente é o maior dos tempos de vida futuro individuais, (T_x) e (T_y) , uma vez que o status falha com a segunda morte no caso de duas vidas. Assim, a variável aleatória do tempo de vida futuro, denotada por $T_{(\overline{xy})}$, é o tempo até à segunda morte, e é dado por:

$$T_{(\overline{xy})} = \max\{T_x, T_y\} = \begin{cases} T_x & T_x > T_y \\ T_y & T_x \leq T_y \end{cases}. \quad (3.47)$$

A sobrevivência deste status requer que (x) ou (y) esteja vivo durante t anos, ou que ambos tenham permanecido vivos durante t anos. A notação $\{T_{(\overline{xy})} > t\}$ representa o evento em que a segunda morte ocorre após o tempo t . Assim, a sobrevivência do status de último sobrevivente é explicada pela união de dois eventos independentes, isto é, $\{T_{(\overline{xy})} > t\} = \{T_x > t\} \cup \{T_y > t\}$:

$$\begin{aligned} {}_t p_{\overline{xy}} &= P[T_{(\overline{xy})} > t] \\ &= P[T_x > t \cup T_y > t] \\ &= P[T_x > t] + P[T_y > t] - P[T_x > t \cap T_y > t] \\ &= {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy} \\ &= {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde ${}_t p_{\overline{xy}}$, representa a probabilidade de pelo menos uma das vidas (x) ou (y) esteja viva após t anos, e observe que em (3.48), a probabilidade de sobrevivência do status de último sobrevivente pode ser obtida utilizando as probabilidades de sobrevivência de uma vida única. A probabilidade de que ambas as vidas (x) e (y) estejam mortas dentro de t anos, denotada por ${}_t q_{\overline{xy}}$, pode ser deduzida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} {}_t q_{\overline{xy}} &= 1 - {}_t p_{\overline{xy}} \\ &= 1 - ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) \\ &= 1 - {}_t p_x - {}_t p_y + {}_t p_x {}_t p_y \\ &= (1 - {}_t p_x)(1 - {}_t p_y) \\ &= {}_t q_x {}_t q_y. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para o cálculo da função densidade de $T_{(\overline{xy})}$, consideremos a derivada da probabilidade de sobrevivência do último sobrevivente, ${}_t p_{\overline{xy}}$ em relação ao tempo t :

$$\begin{aligned} f_{T_{(\overline{xy})}}(t) &= -\frac{d}{dt} {}_t p_{\overline{xy}} \\ &= -\frac{d}{dt} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y) \\ &= -\frac{d}{dt} ({}_t p_x) - \frac{d}{dt} ({}_t p_y) - \left(-\frac{d}{dt} ({}_t p_x {}_t p_y) \right) \end{aligned}$$

portanto, utilizando as equações (3.30) e (3.43), a função densidade de $T_{(\overline{xy})}$ é dada por:

$$\boxed{f_{T_{(\overline{xy})}}(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})}. \quad (3.50)}$$

3.3.2.2 Funções Discretas de Último Sobrevivente

A variável aleatória do tempo de vida futuro curtado do status de último sobrevivente é definida como o número de anos completos antes da morte do último dos dois indivíduos. Esta variável é denotada por $K_{(\overline{xy})}$, sendo expressa como $K_{(\overline{xy})} = \lfloor T_{(\overline{xy})} \rfloor$.

A função probabilidade de $K_{(\overline{xy})}$, $P[K_{(\overline{xy})} = k]$, pode ser desenvolvida em termos das probabilidades de sobrevivência e de morte individuais dos dois indivíduos, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P[K_{(\overline{xy})} = k] &= P[k \leq T_{(\overline{xy})} < k + 1] \\ &= {}_k p_{\overline{xy}} - {}_{k+1} p_{\overline{xy}} \\ &= ({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_{xy}) - ({}_{k+1} p_x + {}_{k+1} p_y - {}_{k+1} p_{xy}) \\ &= {}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_{xy} - {}_k p_x p_{x+k} - {}_k p_y p_{y+k} + {}_k p_{xy} p_{x+k:y+k} \\ &= {}_k p_x (1 - p_{x+k}) + {}_k p_y (1 - p_{y+k}) - {}_k p_{xy} (1 - p_{x+k:y+k}) \\ &= {}_k p_x q_{x+k} + {}_k p_y q_{y+k} - {}_k p_{xy} q_{x+k:y+k}, \end{aligned}$$

utilizando a equação (3.45), obtemos:

$$\boxed{P[K_{(\overline{xy})} = k] = {}_k p_x q_{x+k} + {}_k p_y q_{y+k} - {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}) = {}_k |q_{\overline{xy}}|}, \quad (3.51)$$

esta expressão representa a probabilidade de que a última morte entre as vidas (x) e (y) , ocorra exactamente após k anos.

4 Tábuas de Mortalidade e de Comutação

Os conceitos das tábuas de mortalidade e de comutação desempenham um papel fundamental nas estatísticas demográficas e nas ciências actuárias. Essas ferramentas são cruciais para a compreensão da mortalidade, da longevidade e dos comportamentos populacionais, amplamente aplicadas em seguros de vida, seguridade social, estudos epidemiológicos e planejamento de políticas públicas, servindo como base para a determinação de prémios de seguros, reservas actuárias e políticas de aposentadoria.

Neste capítulo definiremos a tábua de vida, conhecida também como tábua de mortalidade. Considerando uma tábua de vida expressa apenas para idades inteiras, apresentaremos, utilizando as suposições da idade fraccionada, métodos para calcular as probabilidades de sobrevivência para todas as idades e durações.

A tábua de comutação é derivada a partir da tábua de mortalidade e, segundo MacDonald [9] e Slud [15] as funções de uma tábua de comutação é um conjunto de fórmulas aplicadas à tábua de mortalidade e que, efectivamente, permite o cálculo simplificado dos prémios de seguro de vida e anuidades aleatórias, com o mínimo do esforço computacional.

4.1 Tábua de Mortalidade

Segundo Ortega [12], uma tábua de mortalidade, também conhecida como tábua de vida, é um instrumento que permite medir as probabilidades de sobrevivência e morte de uma população em função de idade, sendo a descrição estatística mais completa da mortalidade.

As tábuas de mortalidade são adoptadas em seguradoras no cálculo actuarial de prémios, reservas de seguros e anuidades já que através delas é possível determinar probabilidades de vida e morte de segurados. A tábua de mortalidade é um modelo de sobrevivência discreto adoptado pelos actuários para estimar o padrão de mortalidade de uma população ou grupo de indivíduos [7, 13].

Como o interesse aqui é estudar os padrões de sobrevivência e de mortalidade de um grupo, é preciso adoptar um modelo geral por meio do qual seja possível estimar o número de pessoas vivas e mortas no grupo a cada período de tempo, em geral a cada ano.

Definição 4.1.1. *Seja l_x o número de indivíduos vivos em uma população específica que têm exactamente x anos de idade. A tábua de mortalidade inicia-se com o valor l_{x_0} , denominado raiz da tábua, que representa o número inicial de indivíduos de um grupo*

hipotético. A função ℓ_x é definida como número esperado de pessoas vivas aos x anos, e é dada por:

$$\ell_x = \ell_{x+t} + {}_t d_x. \quad (4.1)$$

Onde:

- A função ℓ_{x+t} é o número esperado de pessoas que sobrevivem entre as idades x e $x + t$; e
- A função ${}_t d_x$ é o número esperado de mortes ocorridos entre as idades x e $x + t$.

A partir de (4.1) a função ${}_t d_x$ pode ser escrito como:

$${}_t d_x = \ell_x - \ell_{x+t}. \quad (4.2)$$

Abaixo apresentamos um exemplo de uma porção da tábua de mortalidade, com base em Promislow [13]. Ressalta-se que esta é apenas uma ilustração e não representa dados reais.

x	ℓ_x	d_x
0	100000	2000
1	98000	1500
2	96500	1000
3	95 500	900
\vdots	\vdots	\vdots
ω	0	

Tabela 4.1: Exemplo da porção da tábua de mortalidade

A tábua termina em uma idade limite, denotada por ω , tal que $\ell_\omega = 0$. Essa é a idade em que todas as vidas hipotéticas estarão extintas. O valor de ω varia de acordo com a particularidade de cada tábua de mortalidade.

4.1.1 Funções de Sobrevivência e Morte em Uma Tábua de Mortalidade

Dado um modelo de sobrevivência, podem-se derivar funções para uma tábua de vida. Conforme Dickson et al. [4], as tábuas de mortalidade são geralmente apresentadas em idades inteiras, ou seja, baseadas na variável aleatória de anos completos K_x , variando de uma idade inicial x_0 até uma idade w máxima. A variável x representa uma idade específica e t indica a amplitude da tábua em anos.

Dada a função de sobrevivência ${}_t p_x$ e a função $\{\ell_x\}$, para $0 \leq t \leq w - x_0$, temos que:

$$\ell_{x_0+t} = \ell_{x_0} {}_t p_{x_0}, \quad (4.3)$$

para $x_0 \leq x \leq x+t \leq w$, a equação (4.3) implica que:

$$\begin{aligned}\ell_{x+t} &= \ell_{x_0} {}_{x+t-x_0}p_{x_0} \\ &= \ell_{x_0} {}_{x-x_0}p_{x_0} {}_t p_x \\ &= \ell_x {}_t p_x,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\ell_{x+t} = \ell_x \cdot {}_t p_x. \quad (4.4)$$

Ao tomar (4.4) e dividindo ambos os lados por ℓ_x obtém-se

$$\boxed{{}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}}, \quad (4.5)$$

${}_t p_x$ é a probabilidade de indivíduos com idade x , sobreviverem até idade $x+t$.

A partir de (4.5), subtraindo ambos membros de 1

$$1 - {}_t p_x = 1 - \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x},$$

como $1 - {}_t p_x = {}_t q_x$, segue que

$$\boxed{{}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}}, \quad (4.6)$$

sendo ${}_t q_x$ a probabilidade de indivíduos com idade x , morrerem entre as idades x e $x+t$. Observe que da igualdade (4.2), a equação (4.6) equivale a

$$\boxed{{}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{\ell_x}}. \quad (4.7)$$

4.1.2 Suposições da Idade Fraccionada

A tábua de mortalidade geralmente oferece as probabilidades associadas a idades inteiras, ou seja, para a variável aleatória de tempo de vida curtado K_x . Dado que os valores de ℓ_x são disponibilizados apenas para idades inteiras, torna-se necessário fazer uma suposição adicional ou utilizar informações complementares para calcular as probabilidades envolvendo idades e durações não inteiras. A suposição de idade fraccionada é uma suposição sobre a distribuição da variável aleatória do tempo de vida futuro entre idades inteiras [4].

Nesta subsecção assumimos que a tábua de mortalidade é especificada apenas em idades inteiras e descrevemos duas suposições da idade fraccionada mais úteis.

4.1.2.1 Distribuição Uniforme de Mortes

A suposição de distribuição uniforme de mortes, frequentemente chamada de interpolação linear, é a suposição de idade fraccionada mais comum. Pode ser formulada de duas

maneiras equivalentes, conforme a seguir:

- a) **Primeira formulação da distribuição uniforme de mortes:** Assume-se que ${}_s q_x$ é uma função linear de s , onde a interpolação linear entre $s = 0$ e $s = 1$ resulta em:

$${}_s q_x = s \cdot q_x, \quad (4.8)$$

onde, para qualquer idade inteira x , a probabilidade de mortalidade para $0 \leq s < 1$ anos é s vezes a probabilidade de mortalidade em um ano.

- b) **Segunda formulação da distribuição uniforme de mortes:** para uma vida (x), onde x é uma idade inteira, considerando a variável aleatória de tempo de vida futuro T_x e a variável aleatória de tempo de vida curtado K_x , define-se uma nova variável aleatória R_x para representar a parte fraccionada da vida futura de (x), vivida no ano da morte de modo que $T_x = K_x + R_x$,

$$R_x \sim U(0, 1), \text{ independente de } K_x.$$

Portanto, esta suposição afirma que R_x tem uma distribuição uniforme em $(0, 1)$ independentemente da distribuição de K_x . Lembrando que se $X \sim U(0, 1)$, então $P[X \leq s] = s$ para $0 \leq s < 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} {}_s q_x &= P[T_x \leq s] \\ &= P[R_x \leq s \cap K_x = 0] \\ &= P[R_x \leq s]P[K_x = 0] \\ &= s q_x. \end{aligned}$$

A demonstração da independência de R_x em relação a K_x e da equivalência entre as duas formulações suposições da distribuição uniforme de mortes pode ser encontrada no livro de Dickson et al. [4], página 62.

Uma consequência imediata da suposição uniforme de mortes é

$$\boxed{\ell_{x+s} = \ell_x - s d_x \quad 0 \leq s < 1}, \quad (4.9)$$

Essa relação é derivada reescrevendo a equação ${}_s q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+s}}{\ell_x}$, para $0 \leq s < 1$, substituindo ${}_s q_x$ pela expressão da equação (4.8), temos que ${}_s q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+s}}{\ell_x}$. Definindo q_x , obtemos:

$$s \frac{d_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+s}}{\ell_x},$$

portanto,

$$\ell_{x+s} = \ell_x - s d_x.$$

Assim, a distribuição uniforme de mortes implica que ℓ_{x+s} é uma função linearmente decrescente de s entre idades inteiras. Na prática isto é útil, pois permite a utilização da interpolação linear para calcular probabilidades de sobrevivência para termos não inteiros, desde que a idade inicial seja um número inteiro.

Ao derivar a equação (4.8) em relação a s , obtém-se

$$\frac{d}{ds} {}_s q_x = \frac{d}{ds} s q_x = q_x \quad 0 \leq s < 1.$$

Sabe-se que

$$\frac{d}{ds} {}_s q_x = \frac{d}{ds} (1 - {}_s p_x) = -\frac{d}{ds} {}_s p_x = {}_s p_x \mu_{x+s}, \quad s > 0.$$

Porque o lado esquerdo representa a derivada da função de distribuição de T_x , que é igual à função densidade no lado direito. Assim, entre as idades inteiras a função densidade é constante, ou seja:

$$\boxed{f_x(s) = {}_s p_x \mu_{x+s} = q_x \text{ para } 0 \leq s < 1}, \quad (4.10)$$

portanto, como q_x é constante em relação a s , ${}_s p_x$ é uma função decrescente de s , e μ_{x+s} é uma função crescente de s , o que é adequado para a idade de interesse das seguradoras.

4.1.2.2 Força Constante de Mortalidade

A segunda suposição da idade fraccionada estabelece que a força de mortalidade é constante entre as idades inteiras. Portanto, para uma idade inteira x e para $0 \leq s < 1$, assume-se que μ_{x+s} não depende de s , sendo denotada por μ_x^* . Para determinar o valor de μ_x^* na tábua de mortalidade, utilizamos a seguinte relação:

$$p_x = e\left(-\int_0^1 \mu_{x+s} ds\right).$$

Assim, se $\mu_{x+s} = \mu_x^*$ para $0 \leq s < 1$ então $p_x = e^{-\mu_x^*}$ e, portanto $\mu_x^* = -\ln p_x$. Além disso, para $r < 1$, temos:

$${}_r p_x = e\left(-\int_0^r \mu_x^* ds\right) = e^{-r\mu_x^*} = (e^{-\mu_x^*})^r = (p_x)^r.$$

Da mesma forma, para $r, t > 0$ e $r + t < 1$, obtemos

$${}_r p_{x+t} = e\left(-\int_0^r \mu_x^* ds\right) = (p_x)^r. \quad (4.11)$$

Assim, sob a suposição da força constante, a probabilidade de sobreviver por um período de $r < 1$ anos a partir da idade $x + t$ é independente de t , dado que $r + t < 1$.

4.2 Tábua de Comutação

As funções de comutação são ferramentas essenciais para o cálculo eficiente dos prémios de seguros de vida e anuidades aleatórias, sendo organizadas numa tabela denominada

tábua de comutação. Historicamente, as funções de comutação desempenharam um papel crucial na redução do esforço computacional necessário para determinar cotações de prêmios. Ainda hoje, com uma tábua de mortalidade e uma taxa juros estabelecidas preliminarmente, funcionários de seguradoras podem calcular prêmios utilizando planilhas, sem necessidade de formação quantitativa especializada, graças à simplicidade proporcionada pelas funções de comutação [15].

As funções de comutação são derivadas a partir da função $\{\ell_x\}$ da tábua de mortalidade e da taxa de desconto $v = \frac{1}{1+i}$, onde i é a taxa anual de juros. A tábua de comutação contém, além das colunas usuais de uma tábua de mortalidade, seis funções de comutação, divididas em três funções de sobrevivência (D_x , N_x e S_x) e três funções de morte (C_x , M_x e R_x).

Fórmulas das funções de comutação

i) Função de comutação D_x

$$D_x = \ell_x v^x \quad (4.12)$$

ii) Função de comutação N_x

$$N_x = \sum_{n=1}^{\infty} D_{x+n} = \sum_{n=1}^{\infty} v^{x+n} \ell_{x+n} \quad (4.13)$$

iii) Função de comutação S_x

$$S_x = \sum_{n=1}^{\infty} N_{x+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} D_{x+k+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_{x+k+n} v^{x+k+n} \right) \quad (4.14)$$

iv) Função de comutação- C_x

$$C_x = v^{x+1} d_x, \quad (4.15)$$

v) Função de comutação- M_x

$$M_x = \sum_{n=0}^{\infty} C_{x+n} = \sum_{n=0}^{\infty} v^{x+n+1} d_{x+n}, \quad (4.16)$$

vi) Função de comutação R_x

$$R_x = \sum_{n=0}^{\infty} M_{x+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_{x+k+n} \right) \quad (4.17)$$

Conseqüentemente uma tábua de mortalidade pode gerar diversas tábuas de comutação, bastando ajustar a taxa de juros.

Observe que anteriormente foi assumido que a partir da idade w (a idade máxima da tábua) não há mais sobreviventes, ou seja, $\ell_w = 0$. Portanto, mesmo que o índice n do somatório seja definido em $[0, \infty)$, para idades superiores a w , os valores das funções de comutação serão sempre zero, uma vez que todos os indivíduos atingem w e não há mais sobrevivente.

5 Modelos de Seguros de Vida

Uma apólice de seguro de vida é um contrato firmado entre uma empresa de seguros (seguradora) e a pessoa que compra o seguro (segurado). Em troca do pagamento de prémios por parte do segurado, a seguradora pagará uma quantia financeira pré-determinada, conhecida como benefício por morte, quando da morte do segurado- ao beneficiário do direito, conforme Promislow [13].

O pagamento do benefício de um seguro de vida depende da morte ou sobrevivência do segurado, portanto, o momento do pagamento e o montante do benefício são incertos, pelo que o valor presente do benefício é modelado como uma variável aleatória. Neste capítulo combinamos os modelos de sobrevivência com as funções do valor de dinheiro no tempo para derivar a distribuição do valor presente de um benefício futuro incerto e contingente à vida. Geralmente assumimos que a mortalidade da vida do segurado é conhecida e a taxa de juros é constante e fixa [4, 7].

O valor presente esperado do pagamento pela seguradora é chamado de prémio puro único ou prémio de risco único do contrato, porque é o pagamento único em dinheiro pelo segurado no início do período de seguro que compensaria exactamente a média dos pagamentos futuros que a seguradora terá que fazer [6, 15].

Neste capítulo desenvolvemos os modelos de avaliação para benefícios de uma apólice de seguro de vida, especialmente em seguros de vida inteira, temporário, dotal e diferido. Esses modelos são diferenciados em modelos contínuos e discretos.

Considere a variável aleatória X e com o factor desconto v^t dado em (2.16), e seja S o valor em unidades monetárias que será recebido pelo beneficiário em decorrência do sinistro, além disso recordamos da teoria de probabilidades que se X é uma variável aleatória então $g(X)$ também o será, segundo Rotar [14] obtemos a definição:

Definição 5.1. *O valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura e que paga o benefício de S unidades monetárias no momento da morte do segurado, denotado por Z , é uma variável aleatória, dado por*

$$Z = S v^X. \tag{5.1}$$

Todavia, como X é uma variável aleatória, o que indica a incerteza acerca do momento exacto em que acontecerá a morte do segurado, segundo Dickson et al. [4], o interesse em cada modelo é de calcular o valor esperado da variável aleatória do valor presente Z , que é referido como valor presente actuarial ou prémio de um seguro, ou seja, o valor que ao

ser cobrado é suficiente para se pagar as despesas relacionadas aos riscos assumidos pela seguradora a medida que o tempo vai passando (pagável em uma única parcela) [2, 13]. Neste trabalho é considerado a sigla *VPA* como o valor presente actuarial que é prémio de seguro de vida.

5.1 Seguros Contínuos Individuais

As formulações contínuas dos seguros baseiam-se na suposição de que o pagamento do benefício (indenização) é imediatamente após a morte do segurado. O tempo decorrido desde a emissão da apólice até a morte do segurado é uma variável aleatória de tempo de vida futuro do segurado, denotado por T_x , definida na secção 3.1. Da equação (5.1), assumimos que $X = T_x$, e obtemos a seguinte definição.

Definição 5.1.1. *O valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura, que paga o benefício unitário ($S = 1$) imediatamente após a morte do segurado, denotado por Z_{T_x} , é uma variável aleatória, dado por*

$$Z_{T_x} = v^{T_x} = e^{-\delta T_x}, \quad (5.2)$$

$e^{-\delta T_x}$ é utilizado para o cálculo do valor esperado de Z_{T_x} a tempo de vida contínuo.

Modelo 1. *(Para o seguro de vida inteira, \bar{A}_x) um contrato de seguro de vida inteira com uma cobertura vitalícia que prevê o pagamento do benefício de uma unidade monetária ($S = 1$) ao beneficiário do seguro, imediatamente após a morte do segurado actualmente com idade x , tem como variável aleatória do valor presente dada por*

$$Z_{T_x} = e^{-\delta T_x}, \quad (5.3)$$

o seu valor presente actuarial denotado por \bar{A}_x , é dado por

$$\boxed{VPA = \bar{A}_x = E[Z_{T_x}] = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_x(t) dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt.} \quad (5.4)$$

Modelo 2. *(Para o seguro de vida temporário, $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$) o seguro de vida temporário com a cobertura de n anos que prevê o pagamento do benefício unitário ($S = 1$) ao beneficiário do seguro, imediatamente após a morte do segurado de idade x , ou seja, se somente se o segurado falecer entre as idades x e $x + n$, tem como variável aleatória do valor presente dada por*

$$Z_{T_x} = \begin{cases} e^{-\delta T_x} & T_x \leq n \\ 0 & T_x > n, \end{cases} \quad (5.5)$$

o seu valor presente actuarial denotado por $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$, é dado por

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt, \quad (5.6)$$

onde, n representa o tempo de cobertura de seguro e o “1” acima do “ x ” indica que o seguro é pago se “ x ” expirar antes do “ n ” [7].

Modelo 3. (Para o seguro dotal puro, ${}_n E_x$) um seguro de vida dotal puro de n anos prevê o pagamento do benefício unitário ($S = 1$) no final dos n anos, ou seja, se e somente se o segurado sobreviver pelo menos n anos a partir do momento da emissão da apólice. A variável aleatória do valor presente é dada por

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{com a probabilidade } 1 - {}_n p_x \\ v^n & \text{com a probabilidade } {}_n p_x. \end{cases} \quad (5.7)$$

O único elemento de incerteza no dotal puro é se ocorrerá um sinistro ou não [2]. O seu valor esperado actuarial VPA pode ser denotado por $A_{x:\overline{n}|}^1$, mas é mais conveniente denotar por ${}_n E_x$, e é dado por

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n E_x = v^n {}_n p_x, \quad (5.8)$$

com o número “1” sobre n indicando que o benefício é pago se o prazo n acabar primeiro, ou seja, se o prazo n de seguro transcorrer sem que o segurado tenha morrido nesse intervalo [7].

Como a única data de pagamento possível para o dotal puro é no momento n , não há necessidade de especificar versões do tempo contínuo e discreto, apenas uma versão de tempo discreto medido em anos. Os benefícios do dotal puro não são vendidos com apólices independentes, mas podem ser vendidos em conjunto com benefícios do seguro temporário para criar um seguro dotal misto também conhecido como seguro patrimonial, que é abordado no próximo modelo. Portanto, as funções puras de avaliação dotal revelam-se úteis quando avaliamos outros benefícios [4].

Modelo 4. (Para o seguro dotal misto, $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$) um seguro dotal misto com uma cobertura de n anos prevê um benefício a ser pago após a morte do segurado ou após a sobrevivência do segurado até o fim do prazo de n anos, o que ocorrer primeiro, ou seja, é a combinação do seguro de vida temporário e o seguro de vida dotal puro [2, 4]. Se o benefício de seguro for uma unidade monetária e ser pagável imediatamente após o falecimento ou sobrevivência do segurado actualmente com idade x , a variável aleatória do valor presente é dada por

$$Z_{T_x} = \begin{cases} e^{-\delta T_x} & T_x < n \\ v^n & T_x \geq n, \end{cases} \quad (5.9)$$

o seu valor presente actuarial, denotado por $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$, é dado por

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_n E_x. \quad (5.10)$$

Modelo 5. (Para o seguro de vida diferido) um seguro diferido por m anos fornece um benefício somente se o segurado falecer pelo menos m anos após a emissão da apólice, ou seja, o seguro diferido começa a vigorar depois de m anos [4]. Suponha que um benefício unitário seja pagável imediatamente após a morte do segurado, desde que o segurado morra entre as idades $x + m$ e $x + m + n$. A variável aleatória do valor presente é

$$Z_{T_x} = \begin{cases} 0 & T_x < m \\ e^{-\delta T_x} & m \leq T_x < m + n \\ 0 & T_x \geq m + n, \end{cases} \quad (5.11)$$

o seu valor presente actuarial denotado por ${}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$, é

$${}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_m^{m+n} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (5.12)$$

Mudando a variável de integração de (5.12) para $s = t - m$ obtemos,

$${}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n e^{-\delta(s+m)} {}_{s+m} p_x \mu_{x+s+m} ds,$$

da equação (3.25), temos que ${}_{s+m} p_x = {}_m p_x {}_s p_{x+m}$, e substituindo na última equação, obtemos

$$\begin{aligned} {}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n e^{-\delta s} e^{-\delta m} {}_m p_x {}_s p_{x+m} \mu_{x+s+m} ds \\ &= e^{-\delta m} {}_m p_x \int_0^n e^{-\delta s} {}_s p_{x+m} \mu_{s+(x+m)} ds \\ &= {}_m E_x \bar{A}_{x+m:\overline{n}|}^1, \end{aligned} \quad (5.13)$$

Onde ${}_m E_x$ é o seguro dotal puro para uma pessoa de idade x e $\bar{A}_{x+m:\overline{n}|}^1$ é o seguro temporário por n anos, de uma pessoa de idade $x + m$ [4].

É importante notar que o modelo abordado acima é para o seguro de vida temporário e diferido. É relevante destacar também que é possível combinar os modelos para obtermos novos arranjos, por exemplo, tomando a equação (5.12) e fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos um seguro de vida inteira e diferido, ou seja,

$${}_m|\bar{A}_x = \int_m^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (5.14)$$

Apresentados os seguros contínuos e individuais que cobrem a morte, percebe-se que a diferença, em termos de cálculos, dá-se pela variação dos limites de integração, determinados pelo período de cobertura. Assim, tem-se que a função integrando é a mesma para todos esses seguros, significando que se actualiza actuarialmente a unidade de capital a ser pago no caso dos seguros dotais que evoluem a sobrevivência do segurado. Considerando a função densidade segundo a lei de *Gompertz-Makeham*, dada na equação 3.20, o valor presente actuarial, por exemplo, para seguro de vida inteira é dado a seguir:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{\left(\frac{Bc^x}{\ln(c)}(1-c^t) - At\right)} (A + Bc^{(x+t)}) dt. \quad (5.15)$$

5.2 Seguros Discretos Individuais

Para o seguro de vida com o benefício pagável no final do ano do falecimento do segurado, o tempo decorrido desde a emissão de apólice até a morte do segurado, é uma variável aleatória de anos completos mais um ano, isto é, $K_x + 1$, onde a variável K_x está definida na secção 3.2. Da definição (5.1) consideremos $X = K_x + 1$, obtemos a definição seguinte:

Definição 5.2.1. *o valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura e que paga o benefício unitário no final do ano de acontecimento do sinistro, denotado por Z_{K_x} , é uma variável aleatória, dado por*

$$Z_{K_x} = v^{K_x+1}. \quad (5.16)$$

Quando utiliza-se uma tábua de mortalidade com incrementos anuais, é mais simples trabalhar com funções de valores presentes que consideram pagamentos em durações inteiras [4]. Por uma relevância vamos introduzir uma outra forma de descrever os valores presentes esperados para os modelos desta secção, através de funções de comutação, conforme pode ser visto em [7].

Modelo 1. *(Para seguro de vida inteira, A_x) um contrato de seguro de vida inteira com cobertura vitalícia que prevê o pagamento do benefício de uma unidade monetária ($S = 1$) ao beneficiário do seguro, no final do ano da morte do segurado actualmente com idade x , tem como variável aleatória do valor presente dado por*

$$Z_{K_x} = v^{K_x+1}, \quad (5.17)$$

o valor presente esperado actuarial denotado por A_x com a cobertura vitalícia é

$$A_x = E[Z_{K_x}] = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} P[K_x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \quad (5.18)$$

Utilizando o raciocínio análogo é possível adoptar as fórmulas de comutação para os valores presentes actuarias dos modelos com o benefício pagável no final do ano da morte. Utilizando as definições das funções sobrevivência e morte segundo a tábua de mortalidade, a expressão ${}_k p_x q_{x+k}$ da equação (5.18) equivale a:

$${}_k p_x q_{x+k} = \frac{\ell_{x+k} d_{x+k}}{\ell_x \ell_{x+k}},$$

simplificando o ℓ_{x+k} temos,

$${}_k p_x q_{x+k} = \frac{d_{x+k}}{\ell_x}. \quad (5.19)$$

Agora substituindo o resultado da equação (5.19) em (5.18) obtemos

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{\ell_x},$$

multiplicando numerador e denominador por v^x

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x \ell_x},$$

a expressão $v^x \ell_x$ não depende do argumento k , então

$$A_x = \frac{1}{v^x \ell_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} (\ell_{x+k} - \ell_{x+k+1}),$$

pelas fórmulas de comutação das equações (4.12) e (4.16) obtemos

$$\boxed{A_x = \frac{M_x}{D_x}}. \quad (5.20)$$

Modelo 2. *(Para o seguro de vida temporário, $A_{x:\overline{n}|}^1$) seja um seguro de vida temporário com a cobertura de n anos prevê o pagamento do benefício unitário ao beneficiário do seguro no final do ano da morte do segurado de idade x , se somente se o segurado falecer dentro de prazo de n anos. A variável aleatória do valor presente é*

$$Z_{K_x} = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x \leq n-1 \\ 0 & K_x \geq n, \end{cases} \quad (5.21)$$

o seu valor presente actuarial denotado por $A_{x:\overline{n}|}^1$ é dado por:

$$\boxed{A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}}. \quad (5.22)$$

Para escrever (5.22) em funções de comutação, rescrevemos a equação (5.18),

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

para um inteiro n maior que zero, podemos dividir o somatório acima em duas partes,

$$A_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

subtraindo a igualdade acima por $\sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$, obtemos

$$A_x - \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k},$$

a partir (5.22) obtemos

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = A_x - \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}, \quad (5.23)$$

utilizando a equação (5.19) obtemos

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = A_x - \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{\ell_x},$$

fazendo a troca de variáveis, seja $k = n + u$, sendo u um número inteiro não negativo, então

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = A_x - \sum_{u=0}^{\infty} v^{n+u+1} \frac{d_{x+n+u}}{\ell_x},$$

multiplicando o numerador e o denominador dentro do somatório por v^x , e tirando fora do somatório os termos que não dependem do u , ou seja,

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = A_x - \frac{1}{\ell_x v^x} \sum_{u=0}^{\infty} v^{x+n+u+1} (\ell_{x+n+u} - \ell_{x+n+u+1}),$$

utilizando a definição de (A_x) , dada na equação (5.20), e as funções de comutação (4.12) e (4.16), obtemos

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x},$$

portanto,

$$\boxed{A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}} \quad (5.24)$$

Modelo 3. (*Para o seguro dotal misto, $A_{x:\overline{n}|}$*) seja um seguro dotal misto de n anos que prevê o pagamento do benefício após a morte ou após a sobrevivência do segurado até o fim do prazo de n anos, o que ocorrer primeiro. Se o benefício por morte for de uma

unidade monetária e pagável no final do ano da morte do segurado da idade x , então a variável aleatória do valor presente é

$$Z_{K_x} = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x \leq n-1 \\ v^n & K_x \geq n. \end{cases} \quad (5.25)$$

Em outras palavras o seguro dotal misto é a combinação do seguro temporário de n anos e o seguro dotal puro [2, 4]. O seu valor esperado actuarial denotado por $A_{x:\overline{n}|}$ é

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x, \quad (5.26)$$

ou

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_n E_x. \quad (5.27)$$

Para escrever-se ${}_n E_x$ em fórmulas de comutação consideremos a equação (4.5) que nos dá ${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$ e substituindo em (5.8) obtemos

$${}_n E_x = v^n \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x},$$

multiplicando o numerador e o denominador por v^x obtemos

$${}_n E_x = \frac{v^{x+n} \ell_{x+n}}{v^x \ell_x},$$

pela função de comutação da equação (4.12) obtemos

$${}_n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \quad (5.28)$$

Combinando as igualdades (5.24) e (5.28), podemos escrever $A_{x:\overline{n}|}$ em funções de comutação da seguinte maneira:

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \quad (5.29)$$

Modelo 4. (Para o seguro de vida diferido, ${}_m|A_{x:\overline{n}|}^1$) um seguro diferido por m anos fornece o benefício se somente o segurado de idade x falecer pelo menos m anos após a emissão da apólice. Suponha que um benefício unitário seja pagável no final do ano da morte do segurado, desde que o segurado morra entre as idades $x+m$ e $x+m+n$, a variável aleatória do valor presente é

$$Z_{K_x} = \begin{cases} 0 & K_x < m \\ v^{K_x+1} & m \leq K_x < m+n \\ 0 & K_x \geq m+n. \end{cases} \quad (5.30)$$

O seu valor presente actuarial denotado por ${}_m|A_{x:\overline{n}}^1$, é dado por

$${}_m|A_{x:\overline{n}}^1 = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}. \quad (5.31)$$

Seja $A_{x:\overline{m+n}}^1$ um seguro temporário de $m+n$,

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{m+n}}^1 &= \sum_{k=0}^{m+n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\ &= A_{x:\overline{m}}^1 + {}_m|A_{x:\overline{n}}^1, \end{aligned}$$

portanto,

$$\boxed{{}_m|A_{x:\overline{n}}^1 = A_{x:\overline{m+n}}^1 - A_{x:\overline{m}}^1}, \quad (5.32)$$

o que significa que um seguro diferido por m anos e temporário por n anos pode ser escrito em combinação de dois seguros temporários, utilizando as funções de comutação obtemos

$${}_m|A_{x:\overline{n}}^1 = \frac{M_x - M_{x+m+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x},$$

isto é,

$$\boxed{{}_m|A_{x:\overline{n}}^1 = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}}. \quad (5.33)$$

5.3 Relações Entre os Modelos Contínuos e Discretos de Seguros Individuais

Como foi mencionado na introdução da secção (4.1), que a tábua de mortalidade é um modelo discreto (construída em idades inteiras). Um modelo de sobrevivência paramétrico que inclui a conveniência matemática e suficientemente preciso na representação da sobrevivência humana pode não ser amplamente conhecido, conseqüentemente, adoptamos uma abordagem de avaliação de funções do modelo contingente contínuo a partir da tábua de mortalidade discreta [3], levando em consideração a variável aleatória discreta K_x introduzida na secção 3.

Nesta secção aproximamos as funções do valor presente actuarial para os modelos com o benefício pagável no momento da morte, para funções do valor presente actuarial dos modelos de seguros com o benefício pagável no final do ano da morte do segurado, utilizando uma das suposições da subsecção (4.1.2), conhecida como suposição de distribuição uniforme de mortes.

Lembrando, da equação (4.10), para $0 \leq s < 1$ e para o inteiro positivo y temos

${}_s p_y \mu_{y+s} = q_y$. Rescrevendo a equação (5.6), que representa o valor esperado actuarial para um seguro de vida temporário com o benefício unitário pago no momento da morte do segurado, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^1 v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_1^2 v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \cdots + \int_{n-1}^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt, \end{aligned}$$

mudando a variável de integração para $s = t - k$, obtemos

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 v^{k+s} {}_{k+s} p_x \mu_{x+k+s} ds, \quad (5.34)$$

da equação (3.25), temos a seguinte relação ${}_{k+s} p_x = {}_k p_x {}_s p_{x+k}$ e substituindo em (5.34), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 v^{k+s+1-1} {}_k p_x {}_s p_{x+k} \mu_{x+k+s} ds \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 v^{k+1} v^{s-1} {}_k p_x {}_s p_{x+k} \mu_{x+k+s} ds, \\ \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \int_0^1 v^{s-1} {}_s p_{x+k} \mu_{x+s+k} ds, \end{aligned} \quad (5.35)$$

pela suposição de distribuição uniforme de mortes, temos que ${}_s p_{x+k} \mu_{x+s+k} = q_{x+k}$ e substituindo em (5.35) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \int_0^1 v^{s-1} q_{x+k} ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \int_0^1 e^{\delta(1-s)} ds, \end{aligned}$$

calculando o integral $\int_0^1 e^{\delta(1-s)} ds$ e pela equação (5.22), obtemos

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = A_{x:\overline{n}|}^1 \cdot \frac{e^\delta - 1}{\delta},$$

e como $e^\delta = 1 + i$, segue que

$$\boxed{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1}. \quad (5.36)$$

Tomando $n \rightarrow \infty$, a equação (5.36) leva imediatamente a uma relação semelhante

para o modelo contínuo de seguro de vida inteira avaliado sob a suposição uniforme de mortes [3], ou seja ,

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \quad (5.37)$$

Como o seguro diferido por m anos e temporário por n anos pode ser escrito em combinação de dois seguros temporários, então,

$${}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{i}{\delta} {}_m|A_{x:\overline{n}|}^1. \quad (5.38)$$

Conforme Dickson et al. [4], essas aproximações aplicam-se apenas aos benefícios por morte, o benefício total misto combina os benefícios da morte e da sobrevivência, por isso precisamos dividir os benefícios por morte antes de aplicar uma das aproximações, portanto,

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} \approx \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_nE_x. \quad (5.39)$$

5.4 Seguros de Múltiplas Vidas

Um tipo importante de seguro de vida é o seguro de múltiplas vidas, que é a extensão do seguro de vida individual. Este tipo de contrato cobre duas ou mais pessoas, onde o benefício por morte (indenização) é pago com a ordem de falecimentos das pessoas seguradas. Os seguros de múltiplas vidas são geralmente preferidos por casais para garantir a subsistência do cônjuge sobrevivente quando um dos cônjuges falece. Além disso, estas apólices são utilizadas pelos pais para proteger financeiramente a família. No contexto empresarial, as empresas optam por este tipo de apólice para garantir a subsistência dos seus colaboradores, sendo conhecido como seguro de grupo. Nesta pesquisa, o foco será para as situações que cobrem duas vidas, especialmente de casais. O seu cálculo é possível através de adaptação das expressões previamente apresentadas para uma única vida (secções 5.1 e 5.2), agora ajustadas para duas vidas, após a consideração das expressões apresentadas na secção 3.3. Esta secção é baseada em [4], [6] e [13].

5.4.1 Seguros Contínuos de Vida Conjunta

Os seguros contínuos de vida conjunta utilizam a suposição de que o benefício do seguro é pago imediatamente após a primeira morte de um dos indivíduos, e o tempo até a primeira morte é a variável aleatória $T_{(xy)}$. O valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura e que paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) ou (y) é uma variável aleatória, dado por:

$$Z_{T_{(xy)}} = e^{-\delta T_{(xy)}},$$

o seu valor esperado é encontrado considerando a equação (3.43), da seguinte maneira:

$$E[Z_{T_{xy}}] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{(xy)}}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt.$$

Para um seguro de vida conjunta com cobertura vitalícia, em que a seguradora paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) ou (y) , o *VPA* é:

$$\bar{A}_{xy} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt. \quad (5.40)$$

Para um seguro de vida conjunta com cobertura de n anos, em que a seguradora paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) ou (y) , o *VPA* é:

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^1 = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt. \quad (5.41)$$

No caso de um seguro dotal puro de vida conjunta, em que a seguradora paga o benefício unitário caso a primeira morte não ocorra dentro de n anos, o *VPA* é:

$$A_{xy:\overline{n}|}^1 = {}_n E_{xy} = v^n {}_n p_{xy}. \quad (5.42)$$

Para o seguro dotal misto de vida conjunta, em que a seguradora paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) ou (y) dentro de n , ou após a sobrevivência de (x) e (y) após n anos, o *VPA* é dado por:

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt + e^{-\delta n} {}_n p_{xy} = \bar{A}_{xy:\overline{n}|}^1 + {}_n E_{xy}, \quad (5.43)$$

similarmente como no caso de seguro individual, o seguro dotal misto de vida conjunta também é a combinação do seguro temporário de vida conjunta e o seguro dotal puro de vida conjunta.

Para o seguro de vida conjunta com cobertura vitalícia diferido por m anos, em que a seguradora paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) ou (y) , o *VPA* é dado por:

$${}_m|\bar{A}_{xy} = \int_m^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt. \quad (5.44)$$

Para um seguro de vida conjunta com a cobertura de n anos após um período de diferimento de m anos, o *VPA* é:

$${}_m|\bar{A}_{xy:\overline{n}|}^1 = \int_m^{m+n} e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt. \quad (5.45)$$

5.4.2 Seguros Contínuos de Último Sobrevivente

Os seguros contínuos de último sobrevivente utilizam a suposição de que o benefício do seguro é efectuado imediatamente após a última morte dos indivíduos segurados, e o

tempo até a última morte é a variável aleatória $T_{(\overline{xy})}$. O valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura e que paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) e (y) é uma variável aleatória, dado a seguir,

$$Z_{T_{(\overline{xy})}} = e^{-\delta T_{(\overline{xy})}},$$

o seu valor esperado é:

$$E[Z_{T_{(\overline{xy})}}] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_{T_{(\overline{xy})}}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} ({}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})) dt.$$

Para o seguro de último sobrevivente com cobertura vitalícia, em que a seguradora paga o benefício unitário imediatamente após a morte de (x) e (y) , o *VPA* é:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\overline{xy}} &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} ({}_t p_x \mu_{x+t} + {}_t p_y \mu_{y+t} - {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_y \mu_{y+t} dt - \int_0^{\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x {}_t p_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) dt \\ &= \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

De forma análoga, os restantes seguros de último sobrevivente: seguro temporário, seguro dotal puro, seguro dotal misto, seguro de vida inteira e diferido, e seguro temporário e diferido, são expressos, respectivamente:

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}}^1 = \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 + \bar{A}_{y:\overline{n}}^1 - \bar{A}_{xy:\overline{n}}^1, \tag{5.47}$$

$${}_n E_{\overline{xy}} = {}_n E_x + {}_n E_y - {}_n E_{xy}, \tag{5.48}$$

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}} = \bar{A}_{x:\overline{n}} + \bar{A}_{y:\overline{n}} - \bar{A}_{xy:\overline{n}}, \tag{5.49}$$

$${}_m | \bar{A}_{\overline{xy}} = {}_m | \bar{A}_x + {}_m | \bar{A}_y - {}_m | \bar{A}_{xy}, \tag{5.50}$$

$${}_m | \bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}}^1 = {}_m | \bar{A}_{x:\overline{n}}^1 + {}_m | \bar{A}_{y:\overline{n}}^1 - {}_m | \bar{A}_{xy:\overline{n}}^1. \tag{5.51}$$

Assim, os seguros contínuos de último sobrevivente são calculados a partir dos seguros individuais x e y e do seguro de vida conjunta.

5.4.3 Seguros Discretos de Vida Conjunta

Os seguros discretos de vida conjunta utilizam a suposição de que o benefício do seguro é pago no final do ano do falecimento da primeira morte de um dos indivíduos. No caso de seguros que envolvem a sobrevivência o benefício é pago com a sobrevivência de todos os segurados. O tempo até a primeira morte é a variável aleatória $K_{(xy)}$. O valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura e que paga o benefício unitário no final do ano da morte de (x) ou (y) é uma variável aleatória, dado por:

$$Z_{K_{(xy)}} = v^{K_{(xy)}+1},$$

o seu valor esperado é

$$E[Z_{K(xy)}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(xy) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}).$$

Os seguros discretos de vida conjunta: seguro de vida inteira, seguro temporário, seguro dotal puro, seguro dotal misto, seguros de vida inteira e temporário diferidos, têm como valores presentes actuariais dados, respectivamente:

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}), \quad (5.52)$$

$$A_{xy:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}), \quad (5.53)$$

$${}_n E_{xy} = v^n {}_n p_{xy} = v^n {}_n p_x {}_n p_y, \quad (5.54)$$

$$A_{xy:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}) + v^n {}_n p_x {}_n p_y = A_{xy:\overline{n}|}^1 + {}_n E_{xy}, \quad (5.55)$$

$${}_m | A_{xy} = \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}), \quad (5.56)$$

$${}_m | A_{xy:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}). \quad (5.57)$$

Apresentados os seguros discretos que cobrem a morte, percebe-se que a diferença, em termos de cálculos, dá-se pela variação dos limites do somatório, determinamos pelo período de cobertura. Assim, tem-se que a função somatória é a mesma para todos esses seguros, significando que se actualiza actuarialmente a unidade de capital a ser paga no caso dos seguros dotais que evoluem a morte ou sobrevivência do segurado.

5.4.4 Seguros Discretos de Último Sobrevivente

Os seguros discretos de último sobrevivente utilizam a suposição de que o benefício do seguro é pago no final do ano do falecimento da última morte dos indivíduos segurados. No caso de seguros que envolvem a sobrevivência o benefício é pago com a sobrevivência do último segurado. O tempo até a última morte é a variável aleatória $K(\overline{xy})$. O valor presente de um contrato de seguro com uma determinada cobertura e que paga o benefício unitário no final do ano da morte de (x) e (y) é uma variável aleatória, dado por:

$$Z_{K(\overline{xy})} = v^{K(\overline{xy})+1},$$

o seu valor esperado é:

$$E[Z_{K(\overline{xy})}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P[K(\overline{xy}) = k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} ({}_k p_x q_{x+k} + {}_k p_y q_{y+k} - {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k})).$$

Para o seguro de último sobrevivente com cobertura vitalícia, em que a seguradora paga o benefício unitário no final do ano da morte de (x) e (y) , o *VPA* é:

$$\begin{aligned}
 A_{\overline{xy}} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} ({}_k p_x q_{x+k} + {}_k p_y q_{y+k} - {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k})) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_y q_{y+k} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x {}_k p_y (q_{x+k} + q_{y+k} - q_{x+k} q_{y+k}) \\
 &= A_x + A_y - A_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Da relação (5.58), similarmente como no caso contínuo, os valores presentes actuariais dos seguros discretos de último sobrevivente para o seguro temporário, seguro dotal puro, seguro dotal misto, seguros de vida inteira e temporário diferidos, são dados a seguir, respectivamente:

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|}^1 = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{y:\overline{n}|}^1 - A_{xy:\overline{n}|}^1, \tag{5.59}$$

$${}_n E_{\overline{xy}} = {}_n E_x + {}_n E_y - {}_n E_{xy}, \tag{5.60}$$

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + A_{y:\overline{n}|} - A_{xy:\overline{n}|}, \tag{5.61}$$

$${}_m | A_{\overline{xy}} = {}_m | A_x + {}_m | A_y - {}_m | A_{xy}, \tag{5.62}$$

$${}_m | A_{\overline{xy}:\overline{n}|}^1 = {}_m | A_{x:\overline{n}|}^1 + {}_m | A_{y:\overline{n}|}^1 - {}_m | A_{xy:\overline{n}|}^1. \tag{5.63}$$

Assim, os seguros discretos de último sobrevivente são calculados a partir dos seguros discretos individuais x e y e do seguro discreto de vida conjunta.

6 Aplicação do Software R Para o Cálculo do Prémio em Seguro de Vida

O *software* estatístico *R*, por meio do pacote *lifecontingencies* [16], oferece uma poderosa ferramenta para realizar cálculos financeiros e actuariais em seguros de vida. As funções deste pacote estão organizadas em três grandes classes: funções para a construção da tábua de mortalidade e obtenção das funções derivadas, funções financeiras e funções para cálculos actuarias discretos. Contudo, no presente trabalho, os modelos discretos desenvolvidos no capítulo anterior serão implementados manualmente no ambiente *R*, utilizando o pacote *lifecontingencies* exclusivamente para a construção das tábuas de mortalidade e de comutação. Dado que a implementação de modelos contínuos baseados na mortalidade em tempo contínuo pode ser extremamente complexa, principalmente devido à escassez de dados sobre a mortalidade, optou-se por uma abordagem analítica, assumindo a mortalidade através da lei de *Gompertz-Makeham*.

A análise de prémios dos seguros de vida inteira, temporário e dotais será realizada calculando os prémios para todas as idades, utilizando os dados de mortalidade fornecidos pelo pacote *lifecontingencies*

6.1 Configurações Iniciais

Nesta secção apresentamos as configurações iniciais essenciais para o desenvolvimento dos modelos de cálculo de prémios de seguro no ambiente *R*. A figura 6.1 ilustra o processo de carregamento dos pacotes necessários, a definição da base de dados de mortalidade que serve de referência para a construção das tábuas de mortalidade, e as definições opcionais para personalizar os modelos.

```
> library(lifecontingencies) # Carrega o Pacote lifecontingencies
> library(magrittr)         # Carrega o pacote com operadores semânticos %>%, %$%
>
> try(data(package="lifecontingencies")) # Carrega a base de dados
> data("soalt")             # Carrega os dados específicos da soalt
>
> # Definições opcionais
> rm(list=ls())             # limpa os objetos da ultima execução
> options(scipen = 9999,   # inibe exibição de resultados em notação científica
+         digits = 6,      # limita o número de dígitos das saídas do programa
+         max.print = 20)  # limita o tamanho da saída do programa
> |
```

Figura 6.1: Configurações iniciais

A tabela abaixo apresenta dados das tábuas de mortalidade de alguns países disponíveis no pacote *lifecontingencies*.

Conjunto de dados	Descrição
AF92Lt	tábua de mortalidade feminina para Reino Unido, 1992
AM92Lt	tábua de mortalidade masculina para Reino Unido, 1992
SoaLt	tábua de mortalidade para Estados Unidos a partir de SOA
demoUsa	tábua de mortalidade da segurança social dos Estados Unidos
demoFrance	tábuas de mortalidade francesas de 1990 e 2002
Soa08	tábua de mortalidade ilustrativa da SOA
Soa08Act	tábua de mortalidade ilustrativa a taxa de juros de 6% da SOA.

Tabela 6.1: Dados de tábuas de mortalidade existentes no pacote *lifecontingencies*

6.2 Construção da tábua de mortalidade

A construção das tábuas de mortalidade pode ser realizada utilizando as ferramentas *lifetable* e *probs2lifetable*. A ferramenta *lifetable* requer as informações sobre a idade (x) e o número de sobreviventes a cada idade (l_x), enquanto a ferramenta *probs2lifetable* utiliza as idades e as probabilidades de morte (q_x) ou de sobrevivência (p_x) associadas. Neste estudo, opta-se pela utilização da ferramenta *lifetable*, enquanto a outra abordagem pode ser consultada em [16].

A ferramenta *lifetable* é um objecto do tipo classe que permite a geração da tábua de mortalidade através da função *new*, com duas abordagens principais:

1. A entrada directa dos dados, onde se define um vector de idades $x = [0, 1, 2, \dots, \omega]^T$ e um vector com número de sobreviventes em cada idade, $l_x = [l_0, l_1, l_2, \dots, l_\omega]^T$. Para ilustrar este processo, consideremos as idades de 0 a 9 e número de sobreviventes l_x definido pelo vector $l_x = (1000, 950, 850, 700, 680, 600, 550, 400, 200, 50)$, conforme demonstrado na figura 6.2:

```
> x = seq( from =0 , to =9 , by =1)
> lx = c (1000 ,950 ,850 ,700 ,680 ,600 ,550 ,400 ,200 ,50)
> Tv = new("lifetable", x=x, lx=lx, name ="Exemplo de Tábua de vida")
> print(Tv) # Mostrar a tábua de vida
Life table Exemplo de Tábua de vida

  x   lx    px    ex
1 0 1000 0.950000 4.98000
2 1  950 0.894737 4.24211
3 2  850 0.823529 3.74118
4 3  700 0.971429 3.54286
5 4  680 0.882353 2.64706
[ reached 'max' / getOption("max.print") -- omitted 4 rows ]
```

Figura 6.2: Construção da tábua de mortalidade.

2. A outra abordagem consiste em buscar os vectores x e l_x a partir de um conjunto de dados disponível no pacote *lifecontingencies*. Para exemplificar o uso da ferramenta

lifetable, pode-se utilizar o conjunto de dados *SoaLt*, que contém valores de x e ℓ_x para uma tábua de mortalidade construída pela *Society of Actuaries* (SOA), dos Estados Unidos, conforme ilustrado na figura 6.3:

```
R 4.3.3 · ~/ →
> TVsoa=new("lifetable",x=soaLt$x,lx=soaLt$lx, name="Tábua_vida_SOA")
> print(TVsoa) # Mostrar as primeiras linhas da tábua de vida.
Life table Tábua_vida_SOA

  x      lx      px      ex
1 0 10000000 0.994990 71.3469
2 1  9949901 0.994965 70.7062
3 2  9899801 0.994939 70.0640
4 3  9849702 0.994914 69.4204
5 4  9799602 0.994888 68.7753
[ reached 'max' / getOption("max.print") -- omitted 105 rows ]
```

Figura 6.3: Construção da tábua de mortalidade a partir dos dados do pacote *lifecontingencies*

A figura 6.4 apresenta os gráficos das probabilidades de sobrevivência e de morte em função da idade da tábua de mortalidade construída na figura 6.3, a partir dos dados da SOA:

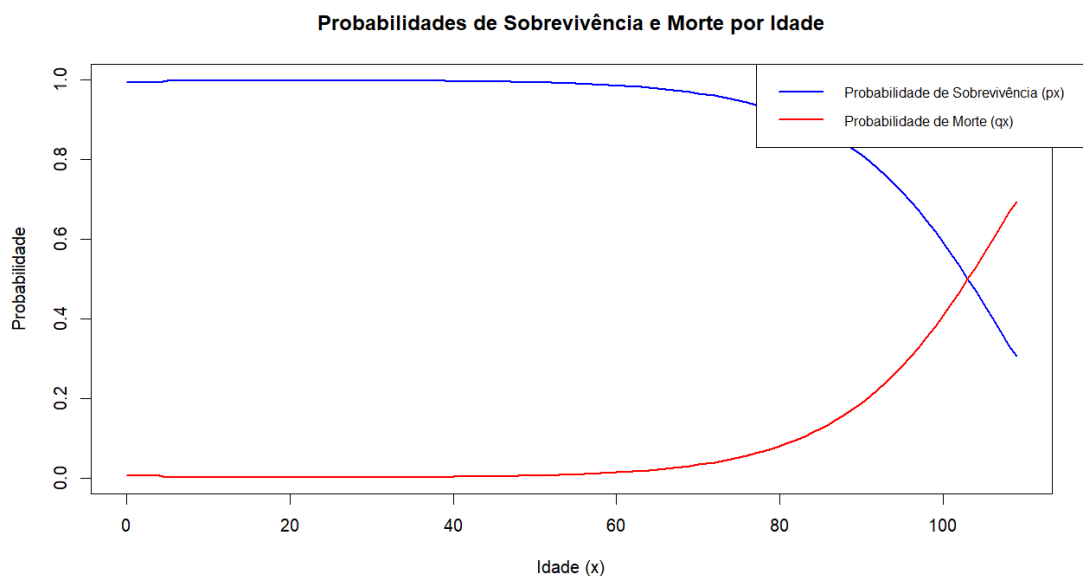


Figura 6.4: Gráfico de probabilidades de sobrevivência e de mortalidade em função da idade

Na Figura (6.4), o ponto de intersecção entre as duas linhas indica que a probabilidade de uma pessoa morrer e a probabilidade de sobreviver são iguais, ambas com valor de 0.5.

6.3 Construção da Tábua de Comutação

Uma tábua de comutação, também conhecida como tábua actuarial, pode ser obtida utilizando a ferramenta *actuarialtable* disponível no pacote *lifecontingencies*. A *actuarialtable*

é um objecto de tipo classe que permite gerar a tábua actuarial através da função “*new*”. Para construir uma tábua de comutação é necessário especificar os vectores de idades (x) e de sobreviventes à idade x (ou seja, ℓ_x), assim como a taxa anual de juros i .

Semelhante à construção de uma tábua de mortalidade, os vectores x e ℓ_x podem ser criados manualmente ou podem ser encontrados de um objecto *lifetable* já existente. Para exemplificar a construção da tábua de comutação, consideremos o objecto “*TVsoa*”, que representa a tábua de mortalidade construída na figura 6.3, e uma taxa anual de juros de 6% ($i = 6\%$), como apresentado na figura 6.5:

```
R 4.3.3 · ~/
> TC = new("actuarialtable", x=TVsoa@x, lx=TVsoa@lx,
+         name="Tábua_de_Comutação", interest=0.06)
> print(TC)# Mostrar as primeiras linhas da tábua de comutação.
Actuarial table  Tábua_de_Comutação interest rate  6 %

   x      lx      Dx      Nx      Cx      Mx      Rx
1  0 10000000 10000000 168358017 47263.6 470301 12487975
2  1  9949901  9386699 158358017 44588.3 423037 12017674
[ reached 'max' /getOption("max.print") -- omitted 109 rows ]
```

Figura 6.5: Construção da tábua de comutação.

6.4 Cálculo do Prémio de Seguro de Vida

Nesta secção, implementamos manualmente os modelos para o cálculo do prémio de seguro de vida, considerando os modelos discretos e contínuos discutidos no capítulo anterior.

6.4.1 Seguros Discretos Individuais

Para o cálculo do valor presente actuarial em R , utilizaremos a tábua de mortalidade da Sociedade dos Actuários, previamente construída. Dessa tábua, extrairemos o vector de sobreviventes à idade x (ou seja, ℓ_x) e definiremos o factor de desconto. Utilizando um exemplo prático, os códigos serão desenvolvidos manualmente em R com base nas equações que representam o valor presente actuarial em funções de comutação.

É importante destacar que a indexação em R começa em 1, e não em 0. Portanto é necessário adicionar +1 para obter a indexação correcta ao manipular os vectores, especialmente o vector ℓ_x . Por exemplo, para uma certa idade x , o número de sobreviventes nessa idade será $\ell_x[x + 1]$.

Exemplo 1. *Considere um seguro de vida contratado por uma pessoa de 30 anos de idade, com o valor de benefício de 50.000 unidades monetárias, pagável no final do ano do sinistro, sujeito a uma taxa de juros de 6% ao ano. Calcule o valor do prémio que este indivíduo deverá pagar para os seguintes cenários: (i) um seguro de vida inteira; (ii) Um seguro temporário de 20 anos; (iii) um seguro dotal puro de 20 anos; e (iv) seguro dotal misto de 20 anos.*

A figura 6.6 apresenta os parâmetros fundamentais para o cálculo actuarial, como a idade inicial, taxa de juros, benefício e duração. Estes parâmetros podem ser ajustados para outros casos, atualizando facilmente as condições para diferentes cenários de seguro.

```
R 4.3.3 · ~/ ↻
> Exemplo1= list(
+           x=30,                # Idade do segurado x
+           w=getOmega(TVsoa),   # Idade limite da tabua TV
+           S=50000,            # Benefício a ser pago
+           n=20,                # Período temporário de seguro
+           m=10,                # Período de seguro diferido
+           i=0.06);            # Taxa de juros
>
> attach(Exemplo1)              # Disponibiliza os objetos
```

Figura 6.6: Parâmetros do exemplo 1.

A figura 6.7 ilustra os modelos discretos individuais aplicados ao cálculo do valor presente actuarial para os casos apresentados no exemplo 1.

```
R 4.3.3 · ~/ ↻
> lx=TVsoa@lx #numero de sobreviventes
> v= 1/(1+i) #fator de desconto
>
> #Seguro de vida Inteira
> k = 0:(w-x-1)
> Dx = lx[x+1]*v^(x+1)
> Mx = sum(v^(x+1+k+1)*(lx[x+1+k]-lx[x+1+k+1]))
> PP= S*(Mx/Dx)
> PP
[1] 5124.18
>
> #Seguro temporario de n anos
> k = 0:(w-x-1-n)
> Mxn= sum(v^(x+1+k+1+n)*(lx[x+1+k+n]-lx[x+1+k+1+n]))
> PP= S*((Mx-Mxn)/Dx)
> PP
[1] 1466.42
>
> #Seguro Dotał puro de n anos
> Dxn = lx[x+n+1]*v^(x+n+1)
> PP = S*(Dxn/Dx)
> PP
[1] 14687
>
> #Seguro Dotał puro de n anos
> k = 0:(w-x-1-n)
> Dxn = lx[x+n+1]*v^(x+n+1)
> Mxn= sum(v^(x+1+k+1+n)*(lx[x+1+k+n]-lx[x+1+k+1+n]))
> PP= S*((Mx-Mxn+Dxn)/Dx)
> PP
[1] 16153.4
```

Figura 6.7: Prémio de seguros de vida a tempo discreto.

As funções Dxn , Mxn , Mxm e $Mxmn$ no código acima, correspondem, respectivamente, às funções D_{x+n} , M_{x+n} , M_{x+m} e M_{x+m+n} , as quais são expressas a partir das

funções de comutação D_x e M_x . Para um segurado de idade x , o somatório estende-se até $w - x - 1$, onde w é a idade máxima da tábua, substituindo, assim, o limite infinito do somatório, como, por exemplo, no cálculo do valor presente actuarial do seguro de vida inteira.

As funções para o cálculo de valores presentes actuariais na figura 6.7 foram implementados manualmente. Contudo, também é possível utilizar funções pré-existentes no pacote *lifecontingencies* para realizar esses cálculos de forma automatizada. Para mais detalhes sobre este método, consulte [5]. Como exemplo, apresentamos esse cálculo automatizado para o seguro de vida inteira e dotal misto do exemplo 1, conforme ilustrado na figura 6.8.

```
> # Seguro de vida inteira
> PP= 50000*Axn(actuarialtable=TC , x=30, i=0.06)
> PP # mostra o resultado
[1] 5124.18
>
> # Seguro dotal misto com a duracao de 20 anos
> PP= 50000*AExn(actuarialtable=TC , x=30, n=20, i=0.06)
> PP # mostra o resultado
[1] 16153.4
```

Figura 6.8: Prémio de seguro de vida (discreto) a partir das funções do pacote *lifecontingencies*.

Observa-se que o cálculo do prémio realizado manualmente no ambiente *R* para o caso discreto (ver figura 6.7), gera resultados equivalentes aos obtidos com o uso das funções do pacote *lifecontingencies* (figura 6.8), o que confirma a precisão das implementações manuais.

6.4.2 Interpretação e Análise Crítica dos Prémios em Função a Idade para Diferentes Coberturas de Seguros de Vida

Esta subsecção apresenta a interpretação e análise crítica dos prémios calculados para os seguros de vida inteira, temporário, dotal puro e dotal misto. Os cálculos foram realizados com base na tábua de mortalidade da Sociedade dos Actuários, considerando um benefício de 50.000 unidades monetárias e uma duração de 20 anos para os seguros temporário e dotal.

Para apoiar a análise, foi construída uma tabela com os prémios correspondentes a cada idade na tábua de mortalidade.

6.4. CÁLCULO DO PRÉMIO DE SEGURO DE VIDA

Idade	Vida Inteira	Temporário	Dotal Misto	Dotal Puro
0	2351.50	1372.60	16366.98	14994.38
1	2253.39	1226.04	16280.40	15054.36
2	2147.65	1069.22	16183.69	15114.48
3	2033.76	901.48	16076.17	15174.70
4	1911.19	722.14	15957.10	15234.96
5	1779.34	530.49	15825.72	15295.23
6	1842.72	536.47	15826.76	15290.30
7	1909.92	543.53	15828.14	15284.61
8	1981.18	551.83	15829.91	15278.09
9	2056.74	561.51	15832.16	15270.65
10	2136.87	572.75	15834.96	15262.22
11	2223.87	587.83	15839.86	15252.04
12	2316.14	604.99	15845.65	15240.65
13	2414.00	624.49	15852.44	15227.96
14	2517.77	646.58	15860.39	15213.81
15	2627.84	671.55	15869.64	15198.09
16	2740.59	695.58	15877.50	15181.92
17	2860.17	722.92	15886.78	15163.85
18	2987.01	753.96	15897.68	15143.72
19	3121.54	789.10	15910.42	15121.31
20	3264.24	828.82	15925.25	15096.43
21	3412.11	869.93	15939.90	15069.96
22	3567.54	914.95	15955.95	15041.00
23	3730.85	964.23	15973.53	15009.30
24	3902.38	1018.16	15992.79	14974.62
25	4082.48	1077.18	16013.87	14936.69
26	4271.50	1141.75	16036.97	14895.21
27	4469.81	1212.39	16062.25	14849.86
28	4677.78	1289.64	16089.94	14800.30
29	4895.77	1374.10	16120.24	14746.14
30	5124.18	1466.42	16153.41	14686.99
31	5363.38	1567.30	16189.70	14622.40
32	5613.77	1677.50	16229.40	14551.91
33	5875.74	1797.83	16272.83	14475.00
34	6149.67	1929.18	16320.33	14391.14
35	6435.97	2072.50	16372.25	14299.75
36	6735.01	2228.79	16429.01	14200.21
37	7047.18	2399.15	16491.02	14091.87
38	7372.86	2584.73	16558.75	13974.02
39	7712.42	2786.78	16632.71	13845.93
40	8066.21	3006.59	16713.43	13706.83
41	8434.58	3245.57	16801.49	13555.92
42	8817.86	3505.16	16897.52	13392.36
43	9216.35	3786.89	17002.18	13215.29
44	9630.35	4092.36	17116.18	13023.82
45	10060.12	4423.21	17240.28	12817.07
46	10505.88	4781.15	17375.29	12594.14
47	10967.84	5167.88	17522.04	12354.16
48	11446.17	5585.17	17681.44	12096.27
49	11940.99	6034.73	17854.42	11819.69

CAPÍTULO 6. APLICAÇÃO DO SOFTWARE R PARA O CÁLCULO DO PRÊMIO
EM SEGURO DE VIDA

Idade	Vida Inteira	Temporário	Dotal Misto	Dotal Puro
50	12452.37	6518.27	18041.96	11523.69
51	12980.37	7037.43	18245.07	11207.64
52	13524.94	7593.74	18464.80	10871.06
53	14086.03	8188.59	18702.20	10513.61
54	14663.50	8823.19	18958.36	10135.17
55	15257.15	9498.50	19234.35	9735.86
56	15866.73	10215.17	19531.25	9316.08
57	16491.90	10973.51	19850.08	8876.57
58	17132.26	11773.38	20191.84	8418.46
59	17787.33	12614.17	20557.44	7943.27
60	18456.55	13494.68	20947.70	7453.02
61	19139.29	14413.16	21363.33	6950.17
62	19834.82	15367.15	21804.87	6437.72
63	20542.36	16353.54	22272.69	5919.15
64	21261.01	17368.51	22766.94	5398.44
65	21989.83	18407.56	23287.54	4879.98
66	22727.77	19465.58	23834.13	4368.55
67	23473.71	20536.88	24406.06	3869.18
68	24226.48	21615.37	25002.36	3386.99
69	24984.82	22694.67	25621.73	2927.06
70	25747.40	23768.33	26262.55	2494.22
71	26512.87	24830.05	26922.87	2092.82
72	27279.79	25873.91	27600.45	1726.54
73	28046.69	26894.58	28292.76	1398.18
74	28812.10	27887.59	28997.04	1109.45
75	29574.48	28849.46	29710.38	860.92
76	30332.30	29777.83	30429.74	651.92
77	31084.04	30671.47	31152.05	480.58
78	31828.17	31530.26	31874.27	344.01
79	32563.19	32355.03	32593.46	238.43
80	33287.64	33147.32	33306.83	159.51
81	34000.09	33909.15	34011.80	102.66
82	34699.19	34642.72	34706.04	63.31
83	35383.62	35350.18	35387.45	37.27
84	36052.16	36033.35	36054.19	20.85
85	36703.68	36693.68	36704.71	11.03
86	37337.14	37332.14	37337.63	5.49
87	37951.60	37949.27	37951.81	2.55
88	38546.22	38545.20	38546.31	1.10
89	39120.28	39119.87	39120.31	0.44
90	39673.18	39673.03	39673.19	0.16
91	40204.43	40204.43	40204.43	0.00
92	40713.63	40713.63	40713.63	0.00
93	41200.56	41200.56	41200.56	0.00
94	41665.04	41665.04	41665.04	0.00
95	42107.05	42107.05	42107.05	0.00
96	42526.65	42526.65	42526.65	0.00
97	42923.96	42923.96	42923.96	0.00
98	43299.32	43299.32	43299.32	0.00
99	43652.94	43652.94	43652.94	0.00

Idade	Vida Inteira	Temporário	Dotal Misto	Dotal Puro
100	43985.25	43985.25	43985.25	0.00
101	44296.95	44296.95	44296.95	0.00
102	44588.25	44588.25	44588.25	0.00
103	44859.66	44859.66	44859.66	0.00
104	45112.81	45112.81	45112.81	0.00
105	45348.95	45348.95	45348.95	0.00
106	45571.63	45571.63	45571.63	0.00
107	45782.22	45782.22	45782.22	0.00
108	46023.26	46023.26	46023.26	0.00
109	46353.98	46353.98	46353.98	0.00
110	47169.81	47169.81	47169.81	0.00

Tabela 6.2: Prémios por idade

A partir dessa tabela, foi gerado um gráfico que ilustra como os prémios variam conforme a idade do segurado:

Prémios de Seguros de vida em Função da Idade

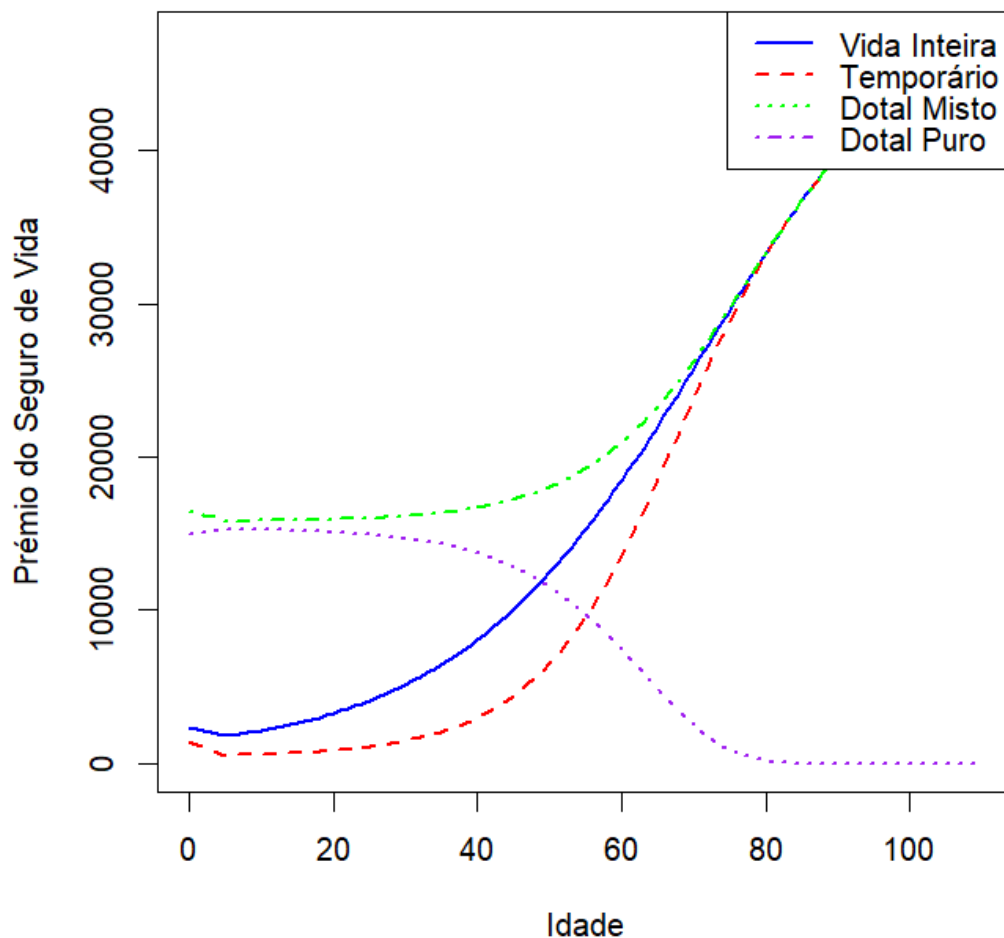


Figura 6.9: Variação dos prémios por idade

Os gráficos obtidos para os prémios dos seguros de vida inteira, temporário, dotal puro e dotal misto permitem uma análise comparativa do comportamento dos prémios em função do aumento da idade do segurado. A seguir, apresenta-se a interpretação detalhada de cada caso:

1. Seguro de Vida Inteira:

Comportamento dos Prémios: Os prémios apresentam um crescimento contínuo à medida que a idade do segurado cresce. Este comportamento decorre da diminuição gradual da probabilidade de sobrevivência com o avanço da idade, o que eleva o risco assumido pela seguradora. Como resultado, o valor actual dos benefícios aumenta proporcionalmente à idade, reflectindo-se em prémios mais elevados.

Análise Crítica:

- Para indivíduos mais jovens, os prémios são relativamente baixos, devido ao menor risco de morte e ao maior período de tempo disponível para pagamento do benefício.
- Para segurados de idades avançadas, os prémios tornam-se significativamente elevados, pois o risco de morte é maior e o tempo disponível para o pagamento do benefício é mais curto.

2. Seguro Temporário:

Comportamento dos Prémios: Os prémios aumentam com a idade do segurado, mas de forma menos acentuada em comparação ao seguro de vida inteira. Esse comportamento deve-se ao facto de a cobertura estar limitada a um período específico, durante o qual a seguradora assume o risco de morte.

Análise Crítica:

- O seguro temporário apresenta prémios inferiores ao seguro de vida inteira, uma vez que a cobertura é restrita a um período definido, reduzindo o risco global para a seguradora.
- Apesar de o período de cobertura ser limitado, os prémios para segurados mais velhos ainda aumentam devido ao maior risco de morte durante o período de cobertura.

3. Seguro Dotal Puro:

Comportamento dos Prémios: Os prémios são mais baixos em comparação com os seguros de vida inteira e temporário, com um aumento progressivo à medida que a idade avança, devido ao pagamento do benefício condicionado à sobrevivência até o final do prazo.

Análise Crítica:

- Para segurados jovens, os prémios são mais altos, pois a probabilidade de sobrevivência até o final do prazo é maior.
- Para segurados de Idade Avançada, os prémios são mais baixos, pois a probabilidade de sobrevivência diminui com a idade avançada.

4. Seguro Dotal Misto:

Comportamento dos Prémios: Os prémios são os mais elevados entre os seguros analisados, pois o pagamento do benefício é garantido tanto em caso de morte durante o prazo quanto em caso de sobrevivência até ao final. O aumento dos prémios com a idade reflete o acréscimo do risco de morte durante o prazo coberto.

Análise Crítica:

- Idades Jovens: Os prémios são relativamente mais baixos, tornando o produto mais atrativo para segurados jovens, que também beneficiam do componente de poupança.
- Idades Avançadas: Os prémios tornam-se muito elevados, dado o maior risco de morte durante o prazo de cobertura, reduzindo a acessibilidade para essas faixas etárias.

6.4.3 Aproximação de Seguros Contínuos por Meio da Suposição Uniforme de Mortes

Para calcular o valor presente actuarial de um seguro com o benefício pagável imediatamente após a morte do segurado de idade x , será utilizada a aproximação descrita na secção 5.3. Esta aproximação consiste em obter os valores presentes actuariais dos seguros de vida com o benefício pagável ao final do ano da morte e multiplicá-los por $\frac{i}{\delta}$, onde i representa a taxa anual de juros e δ a força anual de juros. No pacote *lifecontingencies* a função que retorna o valor de $\frac{i}{\delta}$ é “*i/interest2Intensity(i)*”, onde “*interest2Intensity(i)*” converte a taxa anual de juros (i) em força de juros (δ).

Para exemplificar consideremos o exemplo 1, em que o benefício de 50000,00 era pagável no final do ano da morte, passando a ser pagável imediatamente após a morte do segurado, para um seguro com uma cobertura vitalícia. A figura 6.10 apresenta o cálculo actualizado para este cenário.

```
R 4.3.3 · ~/ ↻
> PP= ((0.06)/interest2Intensity(0.06))*50000*
+ Axn(actuarialtable=TC , x=30, i=0.06)
> PP # mostra o resultado
[1] 5276.41
> |
```

Figura 6.10: Prémio de seguro vida inteira a tempo contínuo aproximado.

Para os seguros temporários, com ou sem diferimento, e para seguros de vida inteira com diferimento, o processo é análogo ao do exemplo anterior (figura 6.8), onde o benefício é pagável ao final do ano da morte. A diferença está na multiplicação do valor presente actuarial por $(0.06)/\text{interest2Intensity}(0.06)$. Conforme destacado na secção (5.3), essa aproximação não é aplicável para o seguro dotal puro. No entanto, para um seguro dotal misto com duração de 20 anos, em que o benefício é pagável imediatamente após a morte, obtemos o cálculo conforme ilustrado na figura 6.11:

```
R 4.3.3 · ~/ ↵
> PP= ((0.06)/interest2Intensity(0.06))*50000*
+ Axn(actuarialtable=TC , x=30,n=20, i=0.06)+
+ 50000*AExn(actuarialtable=TC , x=30, n=20, i=0.06)
> PP # mostra o resultado
[1] 17663.4
> |
```

Figura 6.11: Prémio de seguro dotal a tempo contínuo aproximado.

6.4.4 Seguros Discretos Para Múltiplas Vidas

No cálculo de prémio para seguros discretos que envolvem múltiplas vidas no ambiente R, as equações do valor presente actuarial são construídas manualmente para diferentes tipos de cobertura, diferenciando as equações para vida conjunta e último sobrevivente.

Vamos ilustrar este cálculo para uma única cobertura. Os seguros de vida conjunta utilizam a mesma função no somatório, o mesmo ocorre com os seguros de último sobrevivente. A principal diferença entre os tipos de coberturas desses seguros reside nos limites do somatório, ou seja, na definição do período de cobertura. Para obter os resultados para outros tipos de seguros, basta ajustar os parâmetros temporais conforme o tipo de cobertura.

Exemplo 2. *Calcule o valor do prémio, com uma taxa juros de 5% ao ano, a ser pago por um casal composto por uma mulher de 30 anos e um homem de 40 anos, para um seguro diferido com o período de diferimento de 10 anos e uma duração de 20 anos após esse diferimento. Este seguro prevê o pagamento de 20 000 unidades monetárias no caso de falecimento de um dos cônjuges durante o período de cobertura, ou aos herdeiros no caso de falecimento de ambos durante a vigência do seguro. O benefício será pago no final do ano em que o sinistro ocorrer..*

As figuras apresentadas a seguir ilustram os parâmetros fundamentais utilizados no exemplo 2, bem como os modelos desenvolvidos para o cálculo do valor presente actuarial de seguros discretos envolvendo duas vidas.


```

R 4.3.3 · ~/
> Exemplo2 = list(
+   x = 30,           # Idade do segurado x
+   y = 40,           # Idade do segurado y
+   grupo = c(TVsoa,TVsoa), # Grupo formado por um casal(mesma tábua)
+   w = getOmega(TVsoa), # Idade limite da tábua
+   S= 20000,        # Benefício a ser pago
+   m = 10,          # Período diferido de seguro
+   n = 20,          # Período temporário de seguro
+   i = 0.05);      # Taxa de juros
> attach(Exemplo2) # Disponibiliza os objectos

```

Figura 6.12: Parâmetros do Exemplo 2.

```

R 4.3.3 · ~/
> lx=ly=TVsoa@lx # Número de sobreviventes da tábua
> v= 1/(1+i)     # Fórmula de Fator desconto
>
> # Seguro de vida Conjunta (Seguro Diferido)
> k = m:(m+n-1)
> px=lx[x+1+k]/lx[x+1]
> py=ly[y+1+k]/ly[y+1]
> qx1=(lx[x+1+k]-lx[x+1+k+1])/lx[x+1+k]
> qy1=(ly[y+1+k]-ly[y+1+k+1])/ly[y+1+k]
> Axy= S*sum(v^(k+1)*px*py*(qx1+qy1-qx1*qy1))
> Axy # Mostrar o Resultado
[1] 2278.34
>
> # Utilizando a função disponível no pacote lifecontingencies
> Axy=20000*Axyzn(grupo, c(x,y), i=0.05,m=10, n=20, status='joint')
> Axy # Mostrar o Resultado
[1] 2278.34
>
> #Seguro de último sobrevivente (Seguro diferido)
> k = m:(m+n-1)
> px=lx[x+1+k]/lx[x+1]
> py=ly[y+1+k]/ly[y+1]
> qx1=(lx[x+1+k]-lx[x+1+k+1])/lx[x+1+k]
> qy1=(ly[y+1+k]-ly[y+1+k+1])/ly[y+1+k]
> Axyu= S*sum(v^(k+1)*(px*qx1+py*qy1- px*py*(qx1+qy1-qx1*qy1)))
> Axyu # Mostrar o Resultado
[1] 235.739
>
> # Utilizando a função disponível no pacote lifecontingencies
> Axyu=20000*Axyzn(grupo, c(x,y),i=0.05,m=10, n=20, status = 'last')
> Axyu # Mostrar o Resultado
[1] 235.739

```

Figura 6.13: Prémio para o seguro de duas vidas a tempo discreto.

No código da figura 6.13, as funções px , py , $qx1$ e $qy1$ correspondem, respectivamente, às funções ${}_k p_x$, ${}_k p_y$, q_{x+k} e q_{y+k} , que representam as probabilidades individuais de sobrevivência e de morte. Estas probabilidades são expressas em termos de função ℓ_x , que descreve o número de sobreviventes em cada idade x .

6.4.5 Modelos Contínuos Pela Lei de *Gompertz-Makeham*

Devido à impossibilidade de realizar o estudo preciso da mortalidade em tempo contínuo utilizando tábuas de mortalidade, que são discretas, para a precificação de seguros em modelos contínuos, será empregada a lei de *Gompertz-Makeham* apresentada na subsecção 3.1.1. Esta lei permite uma representação mais precisa da mortalidade ao longo do tempo contínuo. O modelo será empregado para exemplificar o cálculo manual do valor presente actuarial para alguns modelos contínuos discutidos no capítulo anterior, utilizando *Software R*.

Exemplo 3. *Seja uma população cuja mortalidade é modelada pela lei de Gompertz-Makeham, com os seguintes parâmetros: $A = 0.0001$, representando um risco de mortalidade constante e independente da idade (como no caso de acidentes); $B = 0.0001$, que define a taxa inicial de mortalidade dependente da idade; e $c = 1.086$, o factor de crescimento exponencial da mortalidade com a idade. A idade máxima da população é de 110.*

A partir da equação (3.18), a força de mortalidade para essa população em função da idade x e tempo t é dada pela função:

$$\mu_{x+t} = 0.0001 + 0.0001 (1.086)^{x+t}. \quad (6.1)$$

A partir da equação (3.19), a função de sobrevivência, que representa a probabilidade de um indivíduo de idade x sobreviver até a idade $x + t$

$${}_t p_x = e^{\left(\frac{0.0001 \cdot (1.086)^x}{\ln(1.086)} (1 - (1.086)^t) - 0.0001t\right)}. \quad (6.2)$$

Reajustando o exemplo 1 para o benefício que é pago imediatamente após a ocorrência do sinistro, considerando que o indivíduo agora pertence à população descrita acima, utilizaremos as equações mencionadas para calcular o valor presente actuarial no *software R*, conforme ilustrado:

```
R 4.3.3 · ~/
> Exemplo3 = list(A=0.0001, # Coeficiente A (taxa base)
+               B=0.0001, # Coeficiente B (Taxa constante de mortalidade)
+               c=1.086, # Coeficiente c (Crescimento exponencial da mortalidade)
+               x = 30, # Idade do segurado x
+               y = 40, # Idade do segurado y
+               m = 10, # Período diferido de seguro
+               n = 20, # Período temporário de seguro
+               S = 50000, # Benefício a ser pago
+               w = 110, # Idade limite da população
+               i = 0.06); # Taxa de juros
> attach(Exemplo3) # Disponibiliza os objetos
```

Figura 6.14: Parâmetros do exemplo 3.

```

R 4.3.3 · ~/
> v=exp(-log(1+i)) #Taxa efectiva para o tempo contínuo
>
> #Funcao integral para os seguros contínuos individuais
> #com o beneficio pago por morte
> fxt= function(t){return(b*v^t*(A+B*c^(x+t))*
+                               (exp((B/log(c)* c^x*(1-c^t)-A*t))))}
>
> # seguro de vida inteira
> PP= c(integrate(fxt, lower = 0, upper =110)$value)
> PP # mostra o resultado
[1] 5345.68
>
> #Seguro temporario
> PP= c(integrate(fxt, lower = 0, upper =n)$value)
> PP # mostra o resultado
[1] 1548.26
>
> #Seguro dotal puro
> npx = exp((B/log(c)*c^x*(1-c^n)-A*n))
> PP= b*v^n*tpx
> PP #mostrar o resultado
[1] 14644.3
>
> #Seguro Diferido
> PP= c(integrate(fxt, lower = m, upper =n)$value)
> PP # mostra o resultado
[1] 844.303
>
> # Funcao integral para o seguro de vida conjunta (x e y)
> f=function(t){return(b*v^t*((A+B*c^(x+t))+(A+B*c^(y+t)))*
+                               (exp((-A*t-B/log(c)*c^x*(c^t-1))))*
+                               (exp((-A*t-B/log(c)*c^y*(c^t-1)))))}
>
> # Seguro temporario de vida conjunta
> PP= c(integrate(f, lower =0 , upper =n)$value)
> PP #mostra o resultado.
[1] 4736.73

```

Figura 6.15: Seguros de vida a tempo contínuo pela lei de *Gompertz-Makeham*.

7 Conclusão

O objectivo deste estudo foi descrever e implementar no software R modelos matemáticos para o cálculo de prémios em seguros de vida individual e de duas vidas, considerando diferentes tipos de seguros, como vida inteira, temporário, dotal puro e misto, além de analisar o impacto das variáveis de idade, bem como das probabilidades de sobrevivência e morte, nos cálculos desses prémios.

A análise revelou que o prémio do seguro de vida inteira é o mais elevado, pois oferece a cobertura até a morte do segurado, independentemente da idade. Em contrapartida, o prémio do seguro temporário é mais baixo em relação ao prémio do seguro de vida inteira, devido à cobertura limitada a um período específico, o que reduz o risco para a seguradora. O prémio do seguro dotal misto é superior ao do seguro temporário, em razão da cobertura tanto para morte quanto para sobrevivência, enquanto o prémio do seguro dotal puro é o mais baixo entre os dotais, pois cobre apenas a sobrevivência.

Em relação ao perfil dos segurados, observou-se que os prémios são mais baixos para segurados jovens, que têm no seguro temporário e no seguro dotal puro opções acessíveis, sendo que o seguro dotal puro inclui um componente de poupança. Por outro lado, para segurados com idades mais avançadas, os prémios são mais elevados devido ao aumento do risco de morte. Nessa faixa etária, o seguro dotal puro, que cobre exclusivamente a sobrevivência, é uma opção vantajosa, pois apresenta prémios menores em comparação ao seguro de vida inteira.

Para as seguradoras, a análise das probabilidades de morte e sobrevivência, com base nas tábuas de mortalidade, aliada às taxas de juros, é fundamental para a precificação do prémio em seguros de vida. A idade do segurado e o tipo de seguro escolhido impactam diretamente o risco e a precificação adequada.

A implementação dos modelos matemáticos no software R foi fundamental para a aplicação prática dos cálculos de prémios. A escolha pela implementação manual, em vez de utilizar pacotes específicos para cálculos em tempo discreto, possibilitou uma análise mais aprofundada, garantindo a consistência dos resultados com os princípios teóricos subjacentes.

Futuras pesquisas podem explorar modelos mais complexos em tempo contínuo, como o desenvolvimento das funções de mortalidade e ajustes nas tábuas de mortalidade. A implementação de modelos para contratos envolvendo múltiplas vidas representa um avanço significativo, permitindo uma análise mais detalhada de seguros colectivos e das interações entre diversos factores de risco. O uso de dados reais de mortalidade e técnicas de modelagem estocástica avançada pode melhorar a precisão dos modelos, tornando os cálculos

mais aplicáveis ao mercado de seguros.

Além disso, é importante considerar cenários económicos variáveis, como mudanças nas taxas de juros e mortalidade, que impactam a precificação dos prémios em seguros de vida.

Bibliografia

- [1] ATUNCAR, G. S. *Conceitos básicos de processos estocásticos*. Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Minas Gerais, pages 1-83, 2011.
- [2] BOWERS, N. et al. *Actuarial Mathematics*. 2. ed. [S.l.]: Society of Actuaries, 1997.
- [3] CUNNINGHAM, R. J.; HERZOG, T. N.; LONDON, R. L. *Models for quantifying risk*. 2nd. ed. [S.l.]: ACTEX Publications, 2006. ISBN 9781566985840.
- [4] DICKSON, D. C.; HARDY, M. R.; WATERS, H.R. *Actuarial mathematics for life contingent risks*. 2. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2018.
- [5] DINIZ, P. H. S. Universidade Federal Da Paraíba (UFPB) Centro de Ciências Sociais Aplicadas (CCSA) Departamento de Finanças e Contabilidade (DFC) Curso de Bacharelado em Ciências Atuariais (CCA). 2022.
- [6] GERBER, H. U., *Life insurance mathematics*, 3. ed. Berlin: Springer Science & Business Media, 1997.
- [7] GUPTA, A. K.; VARGA, T. *An introduction to actuarial mathematics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 14.
- [8] MACDONALD, A. S.; RICHARDS, S. J.; CURRIE, I.D. *Modeling Mortality with Actuarial Applications*. [S.l.]. Cambridge University Press, 2018.
- [9] MACDONALD, A. S. *Commutation Functions*. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online, 2014.
- [10] MAGALHOÃES, M. N. *Probabilidades e variáveis aleatórias*. Edusp, 2006.
- [11] MARIOTTO, R. P., et al. *Introdução as variáveis aleatórias e cadeias de markov*. 2009.
- [12] ORTEGA, A. *Tablas de mortalidad*. Centro Latinoamericano de Demografía: San José, Costa Rica. 1987.
- [13] PROMISLOW, S. D. *Fundamentals of actuarial mathematics*. [S.l.]: Jonh Wiley & Sons, 2014.

- [14] ROTAR, V. I. *Actuarial models: the mathematics of insurance*. [S.l.]. Chapman and Hall/CRC, 2014.
- [15] SLUD, E. V. *Actuarial mathematics and life-table statistics*. Chapman & Hall/CRC, 2012.
- [16] SPEDICATO, G. A. *The lifecontingencies package: Performing financial and actuarial mathematics calculations in R*. Journal of Statistical Software, 55, 1-36, 2013.
- [17] WOLTHUIS, H. Insurance industry, actuarial international notation. In: SUNDT, B.; TEUGELS, J. L. (Ed.). *Encyclopedia of actuarial science*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. v. 2.
- [18] WOLTHUIS, H.; WILLEMSE, W. J. *Insurance Industry, Mortality Tables*. in 2005.
- [19] YNOGUTI, C. A. *Probabilidade, Estatística e Processos Estocásticos*. Apostilha. Universidade de São Paulo, 2011.