UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

TRABALHO DE LICENCIATURA

TEMA:

SOBRE O MÉTODO VARIACIONAL EM PROBLEMAS ESPECTRAIS

AUTOR: Hélio Zeca Armando Mahesso

Estudante finalista do curso de Matemática Pura

Maputo, Março de 2012

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

TRABALHO DE LICENCIATURA

TEMA:

SOBRE O MÉTODO VARIACIONAL EM PROBLEMAS ESPECTRAIS

AUTOR: Hélio Zeca Armando Mahesso

Estudante finalista do curso de Matemática Pura

SUPERVISOR: João Sebastião Paulo Munembe

Professor Associado da UEM

Maputo, Março de 2012

DECLARAÇÃO SOB PALAVRA DE HONRA

Este trabalho foi realizado somente na base do material referençiado em todo seu decurso.

....

Helio Zeca Armando Mahesso

Conteúdo

Agradecimento

De modo a concretizar este trabalho, houve colaboração de diversas individualidades e colectivos pelo que gostaria antes de tudo gratificar por tudo que fizeram para sua concretização.

- Com satisfação ao Prof. Doutor João Sebastião Paulo Munembe meu Professor e supervisor, pelo apoio, incentivo, orientações constantes e pela confiança prestada na concepção e prossecução deste trabalho.

- A todos os docentes e trabalhadores do Departamento de Matemática e Informática (DMI) que me formaram e aqueles que manifestaram o seu apoio, no sentido de viabilizar este trabalho.

- Aos meus colegas do curso de Matemática, Informática e Estatística em particular ao Ornélio Magaia, Admiro Valoi, Abel Miguel, Cláudio Mathe, Bélis Fandaziane, Francisco Sumbana, Aurélio Mavie, Alírio Nhoela, pelas discussões, sugestões que prestaram ao longo do curso.

- Por último, mas não últimos, aos meus familiares o meu muito obrigado pelo imensurável apoio, paciência e colaboração que concederam ao longo de toda vida, o que impulsionou para que este trabalho pudesse brotar. Sem me esquecer dos meus amigos e todos aqueles que directa ou indirectamente estiveram sempre comigo. Obrigado!

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais e irmãos que de forma incondicional me apoiaram.

Introdução

O estudo da teoria de operadores é importante nos vastos ramos das ciências exactas, onde muitos processos podem ser descritos por um operador, cujas propriedades variam de acordo com o espaço em que se define, dentre os quais o *espaço de Hilbert*[1].

A teoria de operadores lineares no espaço de Hilbert é principalmente orientada para aplicações das propriedades espectrais de operadores integrais e diferenciais, i.e. na análise da equação

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \tag{1}$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial.

Na obra [3] "Theory of Linear Operators in Hilbert Space", de N. I. Akhiezer e I. M. Glazman, estuda-se as propriedades de operadores lineares não limitados e que são definidos num domínio restrito do espaço de Hilbert H e cujo os domínios destes operadores são densos em H.

Na obra [5] "Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space", de G. Helmberg, estuda-se as propriedades de operadores lineares (não necessariamente limitados) no espaço concreto de Hilbert L_2, e cujos os domínos destes operadores são uma variedade linear.

Na obra [9] "Applications of funcional analysis and operator theory", de V. Hutson, J. Pym, M. Cloud, estuda-se as aplicações e propriedades de operadores diferenciais ordinários compactos e auto-adjuntos nos espaços de *Banach*[2] e sub-espaços de Hilbert.

Em geral nas obras acima salientadas estudam-se as aplicações e propriedades de operadores definidos num sub-espaço do espaço de Hilbert H. E neste contexto surge uma complexidade,

[1] David Hilbert (1862–1943)

[2] Stefan Banach (1892–1945) — matemático polaco

uma vez que o operador diferencial $\mathcal{L}$ actua em espaços diferentes, o que não permite a utilização dos teoremas clássicos da Análise Funcional.

Portanto, é natural outro tipo de abordagem para investigar o problema espectral (1) com base na introdução de dois espaços, o que torna a investigação mais simples, e permite a utilização dos teoremas clássicos da Análise Funcional.

Desenvolvemos este método neste presente trabalho de licenciatura que tem como objectivo geral a aplicação do cálculo variacional no estudo da teoria do problema espectral

$$\mathcal{L}u = \lambda Tu, \tag{2}$$

onde o operador diferencial $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}\colon H \to L_2$) actua de um espaço de Hilbert H para o espaço L_2 de funções com quadrado integrável segundo *Lebesgue*[3], e o operador T $(T\colon H \to L_2)$ que é definido pela igualdade

$$Tu(x) = u(x), \tag{3}$$

serve de conector dos dois espaços.

E como objectivos específicos:

- Estudar as condições de resolubilidade do problema espectral (2);
- Estudar as condições de resolubilidade do problema espectral no caso em que o funcional é quadrático;
- Construir exemplos ilustrativos.

Para além da Introdução e Conclusão, o presente trabalho é composto por dois capítulos e bibliografia.

No primeiro capítulo deste trabalho de licenciatura faz-se mensão à conceitos básicos da Análise Funcional, nomeadamente Espaços Lineares e Normados, Espaços Euclidianos e de Hilbert e da Teoria dos Operadores e seus Espectros.

[3]Henri Lebesgue (1875–1941)

No segundo capítulo estudam-se as condições de resolubilidade do problema espectral (2), onde o operador T possui propriedades que desempenham um papel fundamental na análise do problema, e também estudam-se as condições de resolubilidade do problema espectral no caso em que o funcional é quadrático. De realçar que neste trabalho investiga-se as condições de existência e unicidade de soluções do problema espectral (2) que aplicam-se na resolução de problemas da física-matemática, de salientar a obra [2].

Na compilação final deste trabalho foi usado o $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Simbologia

- $\emptyset$ designa o conjunto vazio
- $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais
- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reias
- $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos
- $dimA$ é a dimensão do espaço A
- $\overline{A} = X$ representa o fecho de A em X
- $sp(A)$ representa a variedade linear gerada por A
- $(.,.)$ representa o produto interno
- A^* é o operador adjunto do operador A
- $KerA$ representa o núcleo do operador A
- $\sigma(A)$ representa o espectro do operador A
- $\square$ denota o fim da demonstração

Capítulo 1

Noções Preliminares

Consideremos neste capítulo breves noções de Análise Funcional, fundamentais para o nosso trabalho, retiradas das obras [3] "Theory of Linear Operators in Hilbert Space", de N. I. Akhiezer e I. M. Glazman e [7] "Elementos da teoria de funções e da Análise Funcional", de A. Kolmogorov e C. Fomin.

1.1 Espaços Lineares e Normados

Definição 1.1.1. *Denomina-se espaço linear ou vectorial sobre o campo $\mathbb{P}$ (como regra, o $\mathbb{P}$ é campo dos números reais $\mathbb{R}$ ou campo dos números complexos $\mathbb{P}$)um conjunto não vazio L(x, y, z ... denotando os seus elementos) que goza das propriedades:*

I. Dado dois elementos quaisquer x, y, $\in$ L, existe um único elemento z $\in$ L, chamado soma de x e y e denotado por $x + y$, sendo que se cumpra os axiomas:

- $x + y = y + x$ (comutatividade da operação soma);
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatividade da operação soma);
- Em L existe um elemento θ tal que $x + \theta = x$ $\forall$ x $\in$ L;
- $\forall$ x $\in$ L, existe um elemento -x tal que $x + (-x) = \theta$;

II. Dado qualquer número α real ou complexo e $\forall$ x $\in$ L, existe um elemento αx $\in$ L e estão satisfeitas as condições:

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $1.x = x$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Exemplo 1.1.1. O conjunto das sucessões de n números reais (complexos)

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

com operações de soma e multiplicação por números reais (complexos resp.) definidas pelas fórmulas

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...x_n + y_n)$$

e

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Exemplo 1.1.2. O conjunto l constituido por sucessões infinitas

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

(de números reais ou complexos) com operações :

$$(x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$$

e

$$\alpha(x_1, x_2, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...).$$

também será um espaço linear.

Dependência Linear:

Os elementos x, y, ... , w de um espaço linear L são ditos linearmente independentes se existir uma família de números $\alpha, \beta, ..., \lambda$ reais ou complexos, não nulos na totalidade, tais que $\alpha x + \beta y + ... + \lambda w = 0$. No caso contrario são linearmente dependentes.

Subespaços

Uma parte não vazia L' de um espaço linear L denomina-se subespaço de L, se L' constituir um espaço linear com respeito às operações de soma e multiplicação definidas em L.

Em outras palavras, $L' \subset$ L é um subespaço de L se de x $\in L'$, y $\in L'$ resulta $\alpha x + \beta y$ $\in L'$ para $\forall$ α e β.

Definição 1.1.2. *Seja L um espaço linear. Dados elementos*

$$x_1, x_2, ..., x_m \in L,$$

um elemento

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... \alpha_m x_m \in L$$

(onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{P}$) chama-se combinação linear dos vectores $x_1, x_2, ..., x_m$.

Dado o subconjunto M $\subseteq L$, o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) formados por elementos de M, chamam-se variedade linear (subespaço linear) gerada por M.

Definição 1.1.3. *O subconjunto M de um espaço linear L chama-se base se M é livre e*

$$sp(M) = L.$$

Definição 1.1.4. (Sucessão de Cauchy) *Seja (L, d) um espaço métrico.*

A sequência $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ de pontos do espaço métrico (L,d) é chamada a sequência de Cauchy[1] (fundamental) *se $\forall$ $\epsilon > 0$ $\exists$ $K \in \mathbb{N}$ tal que $\forall$ m, $n > k$, $d(x_m, y_n) < \epsilon$.*

Definição 1.1.5. (Compacticidade) *Um conjunto $M \subseteq X$ chama-se compacto se de qualquer sucessão $\{x_n\}$ dos elementos de M é possível escolher subsucessão $\{x_{n_k}\}$ convergente a $x \in M$.*

[1] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) — matemático francês

Definição 1.1.6. *Chamaremos de funcional qualquer função numérica f definida num espaço linear L.*

Sendo que:

1) f é linear se $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall$ x, y $\in L$, $\forall$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) f é linear conjugado se $f(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} f(x) + \overline{\beta} f(y)$ $\forall$ x, y $\in L$, $\forall$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exemplo 1.1.3. No espaço vectorial $\mathbb{P}^n$ o funcional $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ é um campo real ou complexo) definido por $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{P}^n$ e $a_k \in \mathbb{P}$, $k = 1, 2, ..., n$, representa um funcional linear.

No espaço $\mathbb{C}^n$ o funcional g definido por $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \overline{x_k}$ representa um funcional linear conjugado.

Exemplo 1.1.4. Dada uma função $y_0 \in C = C[a, b]$ definamos o funcional $f : C \to \mathbb{R}$ pela fórmula $f(x) = \int\limits_a^b x(t) y_0(t) dt$, das propriedades básicas da integral *Riemann*[2] ou *Lebesgue* resulta que este funcional é linear.

Analogamente, o funcional $\overline{f(x)} = \int\limits_a^b \overline{x(t)} y_0(t) dt$, será linear conjugado sobre o espaço C([a, b], $\mathbb{C}$) das funções contínuas $x : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Definição 1.1.7. *Seja L um espaço linear.*

Um funcional convexo homogêneo P ($P(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha P(x) + (1-\alpha)P(y)$ $\forall$ x, $y \in L$ e $0 \leq \alpha \leq 1$) sobre L chama-se norma, se satisfizer as seguintes condições suplementares (além da convexidade)

1. $P(x) = 0$ *sse* $x = 0$
2. $P(\alpha x) = |\alpha| \|P(x)\|$ $\forall$ α

Assim podemos afirmar que uma norma em L é um funcional que goza das três propriedades:

1) $P(x) \geq 0$ $\bigwedge$ $P(x) = 0$ sse $x = 0$

2) $P(x + y) \leq P(x) + P(y)$

[2]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) — matemático alemão

3) $P(\alpha x) = |\alpha| P(x) \ \forall \ \alpha$

Proposição 1.1.1. [7] *Um espaço linear munido de uma norma chama-se espaço normado. A norma do elemento $x \in L$ será denotado por $\|x\|$.*

1.2 Espaços Euclidianos Completos

Um dos métodos bem conhecidos de introduzir uma norma num espaço linear consiste em definir neste espaço um produto escalar. Lembremos que senso L um espaço linear sobre $\mathbb{P}$, um funcional $(.,.) : L^2 \to \mathbb{P}$ chama-se produto escalar se se cumprem os seguintes axiomas:

1) $(x, y) = (y, x)$

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

4) $(x, x) \geq 0$ sendo que $(x, x) = 0 \ \Rightarrow x = 0$

Definição 1.2.1. *Um espaço linear com um produto escalar associado chama-se espaço euclidiano.*

Num espaço euclidiano a norma é dada por $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Considerando o trinômio do segundo grau, de variàvel λ:
$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \|x\|^2\lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2$ o discriminante deste trinómio será não positivo se olharmos para propriedade 4) acima. Com isso mostra-se a desigualdade em baixo de Cauchy-Bunyakouskii.

Para qualquer x, y $\in$ L $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.

Teorema 1.2.1. [7] *O espaço euclidiano é espaço linear normado dotado da norma* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Demonstração. Vamos demonstrar a desigualdade triângular.

Usufruindo da desigualdade de Cauchy-*Bunyakousky*[3] temos evidentemente que

$$(x,y) + (y,x) \leq 2\|x\|.\|y\|.$$

A desigualdade triângular advém das desigualdades:

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

□

Definição 1.2.2. *(Sobre enumeralidade de um conjunto)*

Vamos dizer que um conjunto X é enumerável no sentido próprio se |X| *é cardinal do conjunto dos números naturais. De outras palavras, X é enumerável no sentido próprio se existir bijecção* $f : X \to \mathbb{N}$.

Vamos dizer que um conjunto X é enumerável se X não é maior do que enumerável no sentido próprio. De outras palavras, o conjunto enumerável é conjunto vazio ou finito ou enumerável no sentido próprio.

Definição 1.2.3. *Diremos que um subconjunto A de um espaço métrico X é totalmente denso (ou denso) em X se* $\overline{A} = X$.

Definição 1.2.4. *Um espaço Euclidiano chama-se separável se existir subconjunto enumerável e totalmento denso em X.*

Tendo estudado espaços euclidianos separáveis. No que segue, impomos a estes a condição suplementar de serem completos.

Assim, seja E um espaço euclidiano completo separável e φ_n, um sistema ortonormado qualquer (não necessariamente completo) neste espaço. Da desigualdade de Bessel resulta que, para que os números $c_1, c_2, ..., c_n$ sejam coeficientes de Fourier de um certo elemento $f \in E$, é necessário que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ converja.

Estabelece-se que num espaço completo, esta condição é necessaria e suficiente.

[3]Viktor Bunyakovsky (1789–1857) – matemático russo)

1.2.1 Espaços de Hilbert. Ortogonalidade

Definição 1.2.5. *Um espaço euclidiano completo de dimensão infinita chama-se espaço hilbertiano.*

Assim, um espaço hilbertiano é um conjunto H constituído por elementos f, g,... de natureza não explicita e que satisfaz as seguintes condições (axiomas):

1) H é um espaço euclidiano completo (ou seja um espaço linear munido de um produto escalar).

2) O espaço H é completo relativamente á métrica $\delta(f,g) = \| f - g \|$.

3) o espaço H é de dimensão infinita, isto é quaquer que seja n em H existem n vectores linearmente independentes.

Observação 1. No trabalho considera-se espaços hilbertianos separáveis..

Definição 1.2.6. (Funcional Bilinear)

Diremos que Ω é um funcional bilinear definido em H, se para cada par dos elementos f, g $\in$ H eles correspondem a um número complexo ou real definido por Ω(f,g) e:

- $\Omega(a_1 f_1 + a_2 f_2, g) = a_1 \Omega(f_1, g) + a_2 \Omega(f_2, g)$
- $\Omega(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta}_1 \Omega(f, g_1) + \overline{\beta}_2 \Omega(f, g_2)$
- $\sup_{\|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1} |\Omega(f,g)| < \infty$

Definição 1.2.7. *Se Ω é uma forma bilinear em H, então a função $\widehat{\Omega}$ em H definida por $\widehat{\Omega} = \Omega(f,f)$ é chamada de forma quadrática associada com Ω.*

Definição 1.2.8. *Seja E um espaço euclidiano sobre $\mathbb{P}$. Os elementos x e y chamam-se ortogonais* (designa-se $x \perp y$) *se* $(x,y) = 0$ (no espaço real significa que $\widehat{(x,y)} = \frac{\pi}{2}$).

Os conjuntos não vazios M,N $\subseteq$ E chamam-se ortogonais (designação M$\perp$ N) se

$$x \perp y \ \forall \text{ x} \in \text{M e} \ \forall \text{ y} \in \text{N}.$$

Definição 1.2.9. *Qualquer que seja* $M \subseteq E$ *o conjunto* $M^{\perp} \subseteq E$ *definido por*

$$M^{\perp} = \{x \in E : (\forall y \in M), (x, y) = 0\}$$

chama-se o anulador de M *ou complemento ortogonal de* M*, isto é*

$$M^{\perp} = \{x \in E : x \perp M\}$$

Definição 1.2.10. *Um sistema de vectores...* $M = \{x_{\alpha}\} \subseteq E$ *chama-se:*

1) sistema ortogonal, se todos os vectores do sistema não são nulos e $x_{\alpha} \perp x_{\beta}$, para $\alpha \neq \beta$;

2) sistema ortonormado se M é ortogonal e $|| x_{\alpha} ||= 1$, $\forall \alpha$;

3) sistema completo se $\overline{Sp}M = E$;

4) base ortogonal se M é um sistema ortogonal e é uma base de E, isto é, qualquer $x \in E$ admite o desenvolvimento em série convergente $x = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x_{\alpha}$;

5) base ortonormal se M é um sistema ortornormado e é uma base de E.

Teorema 1.2.2. [7] (da ortogonalização) *Seja*

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \tag{1.2.1}$$

uma sequência de elementos linearmente independentes de um espaço euclidiano E*. Então, em* E *existe um sistema de elementos*

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots \tag{1.2.2}$$

que goza das seguintes propriedades:

1) o sistema (1.2.2) *é ortogonal e normado;*

2) o elemento φ_n *é uma combinação linear de* $f_1, f_2, \cdots, f_n$*:*

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \cdots + a_{nn} f_n,$$

sendo que $a_{nn} \neq 0$*;*

3) cada elemento f_n se exprime na forma

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{nn}\varphi_n,$$

sendo que $b_{nn} \neq 0$.

Os elementos do sistema (1.2.2), ao se cumprirem as condições 1 a 3, se determinam de modo único a menos do factor -1.

Demonstração. . O elemento φ_1 procura-se como $\varphi_1 = a_{11}f_1$, sendo que a_{11} determina-se da condição

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1,$$

o que quer dizer,

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Assim, φ_1 é único (a menos do sinal). Uma vez determinados os elementos φ_k $(k < n)$, satisfazendo as condições 1 a 3, o vector f_n, se exprime na forma

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

onde

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \;\; para \;\; k < n.$$

De facto, os coeficientes respectivos b_{nk} e, por conseguinte, o elemento h_n determinam-se univocamente das condições

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \cdots - b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

É claro que $(h_n, h_n) > 0$ pois de $(h_n, h_n) = 0$ resulta que os elementos do sistema (1.2.1) não são linearmente independentes. Tomemos

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

Da construção por recorrência resulta que h_n e, por conseguinte, φ_n se exprimem através de $f_1, f_2, \cdots, f_n$, isto é, $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \cdots + a_{nn}f_n$, onde $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n,h_n)}} \neq 0$. Por outro lado,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = 0 \;\; (k < n)$$

e

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \cdots + b_{nn}\varphi_n \quad (b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0),$$

logo, φ_n satisfazem as condições requeridas. □

1.3 Espaço dos Operadores Lineares Contínuos nos Espaços Normados

Definição 1.3.1. *Um operador A com domínio X e contradomínio Y (designação $A : X \to Y$) é uma aplicação que a qualquer elemento $x \in X$ faz corresponder único elemento $y = Ax \in Y$.*

Ao subconjunto D(A) de X chamaremos domínio e o subconjunto do contradomínio Y definido por $ImA = AX = \{Ax : x \in X\}$ chama-se Imagem do operador A.

Definição 1.3.2. *Denomina-se operador linear definido sobre X com valor em Y um operador $A : D_A \to Y$, onde o domínio é variedade linear em X satisfazendo $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$ $\forall\ x_1, x_2 \in D_A$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$.*

Definição 1.3.3. *Um operador $G : Y \to X$ chama-se inverso ao operador $A : X \to Y$ e designa-se $G = A^{-1}$ se $GA = I_x$ e $AG = I_y$ (I_x e I_y são operadores identicos), neste caso o operador A é inversível.*

Definição 1.3.4. *Seja $A : X \to Y$ um operador linear, A chama-se:*

1) injectivo se $[x_1, x_2 \in \mathrm{X},\ x_1 \neq x_2] \Rightarrow [Ax_1 \neq Ax_2]$;

2) sobrejectivo se $AX = Y$;

3) bijectivo se cumpre 1) e 2).

Proposição 1.3.1. [7] *Para o operador $A : X \to Y$ são equivalentes:*

1) A é injectivo e sobrejectivo;

2) A é inversível;

3) $(\forall y \in Y)$ a equação $Ax = y$ tem única solução que pode ser achada pela fórmula $x = A^{-1}y$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) se y $\in$ Y $\exists!$ x $\in$ X, $Ax = y$, $\forall \in$ Y corresponde único x $\in$ X isto é $\exists G : Y \to X$, $GA = I_x$ e $AG = I_y$, então $G = A^{-1}$.

1)$\wedge$ 2) $\Rightarrow$ 3) $Ax = y \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}y \Rightarrow I_x x = A^{-1}y \Rightarrow x = A^{-1}y$.

3) implica directamente da definição uma bijeção que é equivalente à 1). □

Definição 1.3.5. *O subconjunto* $KerA \subseteq D_A$ *determinado por* $KerA = A^{-1}(0_y) = \{x \in D_A : Ax = 0_y\}$ *chama-se núcleo do operador* A.

Proposição 1.3.2. [7] *O operador* A *é injectivo se e somente se* $KerA = \{0_x\}$

Demonstração. $\Rightarrow$ seja A injectivo $\Rightarrow$ $Ax = 0$ tem única solução, $A0_x = A(0.x) = 0.Ax = 0_y$

por outro lado $Ax = 0_y$ tem solução 0x logo $Ax = 0_y$ tem única solução $\{0_x\}$ ou seja $KerA = \{0_x\}$.

$\Leftarrow$ seja $kerA = \{0_x\}$ e $Ax_1 = Ax_2$,

então $0_y = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2)$, como $KerA = \{0_x\}$ temos que $x_1 - x_2 = 0_x$ ou seja $x_1 = x_2$. □

Definição 1.3.6. *Um operador* $A : X \to Y$ *chama-se contínuo no ponto* $x \in X$ *se* $x_n \in X$, $x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to Ax$.

Um operador contínuo em todos pontos do seu domínio chama-se contínuo.

Definição 1.3.7. *Um operador* $A : X \to Y$ *chama-se limitado se levar qualquer conjunto limitado num conjunto limitado.*

Teorema 1.3.1. [7] *Dado operador linear* $A : X \to Y$ *são equivalentes as condições:*

1) A é contínuo;

2) $\exists x_0 \in X : A$ é contínuo no ponto x_0;

3) A é contínuo em 0_x i.e $x_n \to 0_x \Rightarrow Ax_n \to 0_y$;

4) A é limitado;

5) $\exists C < \infty$ tal que $\forall x \in X \parallel Ax \parallel \leq C \parallel x \parallel$.

Demonstração. 1)$\Rightarrow$ 2) directamente da definição 1.3.7.

2) $\Rightarrow$ 3) seja A é contínuo no ponto $x_0 \in$ X, seja $y_n \to 0_x$. consideremos a sucessão

$$x_n = y_n + x_0 \quad (n \in N).$$

É claro que $x_n \to x_0 \ \Rightarrow \ Ax_n \to Ax_0$

$Ay_n = A(x_n - x_0) = Ax_n - Ax_0 \ \to 0_y$ o que significa que A é contínuo no ponto 0_x.

3) $\Rightarrow$ 4) seja D um conjunto limitado em X. $\exists$ R: D $\subseteq B(0_x, R)$ i.e D está contido numa bola aberta B de raio R e centro 0_x.

Suponhamos que A(D) não é conjunto limitado. Então $\exists \ x_n \in D : \|Ax_n\| > n$.

Seja $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}}$, $\|y_n\| = \|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\| \leq \frac{R}{\sqrt{n}}$, $y_n \to 0_x$

$\|Ay_n\| = \|A(\frac{x_n}{\sqrt{n}})\| = \frac{1}{\sqrt{n}}\|Ax_n\| > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \not\to 0$, $Ay_n \not\to 0_y$. Então não é contínuo no ponto 0_x o que contradiz com 3).

4) $\Rightarrow$ 6) $W = A(B(0_x, 1))$ é limitado $\Rightarrow$ $\exists$ R, $W \subset B(0_y R)$

seja x $\in$ X

a) se $x = 0_x$ então $\|Ax\| \leq C\|x\|$.

se x $\neq 0_x$, seja $y = \frac{x}{2\|x\|}$, $\|y\| = \frac{1}{2} < 1$, então y $\in B(0_x, 1) \ \Rightarrow \|Ay\| < R$

$\|Ax\| = \|A(2\|x\|.y)\| \leq 2R.\|x\| \ \forall$ x $\in$ X, ou seja $\|Ax\| \leq C\|x\|$ onde $C = 2R$.

6) $\Rightarrow$ 1) sejam $x_n \to x$, temos que $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \ \to 0$, $n \to \infty$, então $\|Ax_n - Ax\| \to 0$, o que significa que $Ax_n \to Ax$ $\square$

O Espectro de um Operador. A Resolvente

Um dos conceitos mais importantes da teoria dos operadores lineares nos espaços normados é sem dúvida, o conceito de espectro.

Suponhamos que X é um espaço normado sobre o corpo $\mathbb{C}$ e $A : D_A \to X$ é um operador linear com domínio D_A denso em X.

Definição 1.3.8. *A equação* $(A - \lambda I)x = y \ x \in D_A$ *onde* λ *é parâmetro complexo, chama-se equação operacional da* 2^a *espécie.*

Existem quatro principais alternativas em relação ao parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $[A_1]$ O operador $A - \lambda I$ é inverssível continuamente, i.e. $\text{Im}(A - \lambda I) = X$ e existe $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$;

- $[A_2]$ O operador $A - \lambda I$ não é inverssível, i.e $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0_x\}$;

- $[A_3]$ O operador $A - \lambda I$ é inverssível na $\text{Im}(A - \lambda I)$ mas $\text{Im}(A - \lambda I) \neq X$;

- $[A_4]$ O operador $A - \lambda I$ é inverssível, $\text{Im}(A - \lambda I) \doteq X$, mas $(A - \lambda I)^{-1} : X \to X$ não é limitado.

Definição 1.3.9. *O valor $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $[A_1]$ é válida, chama-se o valor regular do operador A.*

A totalidade dos valores regulares denomina-se conjunto de resolvente do operador A e designa-se por $\rho(A)$.

Qualquer que seja $\lambda \in \rho(A)$ existe operador contínuo $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ que se chama resolvente de A associado ao valor regular λ.

Definição 1.3.10. *O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ chama-se espectro do operador A.*

Definição 1.3.11. *O valor $\lambda \in \mathbb{C}$ para o qual $Ker(A - \lambda I) \neq \{0_x\}$ chama-se auto-valor de A.*

- O sub espaço $X_\lambda = Ker(A - \lambda I)$ chama-se auto-espaço do operador A associado ao auto-valor λ;

- Qualquer elemento do auto-espaço X_λ chama-se auto-vector do operador A associado ao auto-valor λ.

1.4 Operadores Adjuntos, Auto-adjuntos e Compactos

Definição 1.4.1. *O espaço normado dos funcionais lineares limitados $\mathcal{L}(X,\mathbb{P})$ denomina-se dual ao E.N. X e designa-se X^*.*

- Para $\forall$ f $\in X^*$ é válido $\mid f(x) \mid \leq \parallel f \parallel . \parallel x \parallel$;
- Se dimX$< \infty$ então qualquer funcional $f : X \to \mathbb{P}$ é limitado

Sejam X,Y E.N. sobre o campo $\mathbb{P}$ e seja A $\in \mathcal{L}$(X,Y) para qualquer g $\in Y^*$ fixo, definamos o funcional $f_g : X \to P$ pela fórmula $f_g(x) = g(Ax) = \langle Ax, g\rangle x \in X$.

Um operador $A^* : Y^* \to X^*$ definido pela fórmula $A^*g = f_g \Leftrightarrow A^*g = goA$ chama-se operador adjunto de A.

Definição 1.4.2. *Se X e X^* são linearmente isométricos (seja $X = X^*$) e $A = A^*$ isto é $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ $\forall$ x,y $\in$ X, então A chama-se operador auto-adjunto.*

Teorema 1.4.1. [3] *Sejam A $\in \mathcal{L}$(X), λ é auto-valor de A, μ é autovalor de A^* e $\mu \neq \lambda$, então auto-espaços associados são ortogonais, i.e. $Ker(A - \lambda I) \perp Ker(A^* - \mu I)$.*

Demonstração. Seja x $\in$ Ker$(A - \lambda Ix)$, g $\in$ Ker$(A^* - \mu Ix^*)$, temos que $Ax = \lambda x$ e $A^*g = \mu g$ pois o operador A^* existe, é único e é determinado pela fórmula $\langle Ax, g\rangle = \langle x, A^*g\rangle$ $\forall$ A $\in$ $\mathcal{L}$(X). então $0 = \langle Ax, g\rangle - x, A^*g) = (\lambda x, g) - (x, \mu g) = \lambda(x, g) - \mu\langle x, g\rangle = (\lambda - \mu)\langle x, g\rangle$ sendo $\lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow \langle x, g\rangle = 0$ e x$\perp$g. $\square$

Definição 1.4.3. *Diremos que a sequencia A_n converge fracamente para o operador A se para cada $f \in H$ a sequencia $A_n f$ convergir fracamente para Af quando ($n \to \infty$).*

Proposição 1.4.1. [7] *Um operador A é compacto em H (espaço de Hilbert) se e somente se A levar qualquer sequência fracamente convergente numa sequência fortemente convergente.*

Demonstração. Suponhamos que esta condição se cumpre e que M é parte limitada de H. Então qualquer subconjunto infinito de M contém uma sequência fracamente convergente. Dado que esta sequência é levada numa fortemente convergente, portanto o conjunto AM é relativamente compacto.

Reciprocamente, A um operador compacto, seja $\{x_n\}$ uma sequência fracamente convergente e x o seu limite na topologia fraca. Então $\{Ax_n\}$ contém uma subsequência fortemente convergente. Ao mesmo tempo , $\{Ax_n\}$ convergindo fracamente para Ax, em virtude da continuidade de A, $\{Ax_n\}$ não pode admitir mais de um ponto de acumulação logo, $\{Ax_n\}$ é convergente.

□

Teorema 1.4.2. [7] *Se A é um operador compacto e B um operador limitado, então os operadores AB e BA são compactos.*

Demonstração. Sendo M um subconjunto limitado de um espaço de Banach E , BM também o será. Logo, ABM é relativamente compacto o que equivale a dizer que o operador AB é compacto. Por outro lado, M sendo limitado AM é relativamente compacto e, em virtude da continuidade de B, o conjunto BAM também será relativamente compacto, logo BA é compacto □

Capítulo 2

Problemas Espectrais

O estudo de problemas espectrais é actual e atrai atenção de vários matemáticos. De salientar as obras [3] "Theory of Linear Operators in Hilbert Space", de N. I. Akhiezer e I. M. Glazman, [5] "Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space", de G. Helmberg e [9] "Applications of funcional analysis and operator theory", de V. Hutson, J. Pym, M. Cloud respectivamente.

Neste capítulo propomos um modelo novo para o estudo de problemas espectrais que consiste no seguinte:

Considera-se um problema de fronteira em dois espaços que são conectados por um operador T que actua de um espaço de Hilbert H para o espaço das funções com quadrado integrável segundo Lebesgue L_2, onde o operador T atribui a cada função do espaço H a mesma função, considerada como elemento do espaço L_2. Considera-se ainda uma equação de Euler para um funcional quadrático e usando o método variacional (vide [1], [6]) representa-se o funcional quadrático como sendo a equação de Euler na forma variacional.

A consideração do problema espectral nestas condições permitirá obter novas condições de resolubilidade para problemas espectrais.

2.1 Equação Modelo e Propriedades

Consideremos a equação

$$-u'' + q(x)u = f(x), \quad x \in [a, b], \tag{2.1.1}$$

onde $q(x), f(x)$ são funções integráveis segundo Lebesgue no segmento [a, b], $q(x)$ é não negativa e a função $u(x)$ é definida e a sua derivada é absolutamente contínua sobre o segmento $[a, b]$.

A equação (2.1.1) é a equação de *Euler*[1] para o funcional quadrático

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left((u'(x))^2 + q(x)u(x)^2\right) dx - \int_a^b f(x)u(x)\, dx. \tag{2.1.2}$$

Sob a condição $q(x) \geq 0$ o funcional quadrático

$$E(u) = \int_a^b \left((u')^2 + q(x)u^2\right) dx \tag{2.1.3}$$

é definido positivamente, este facto permite-nos definir um espaço de Hilbert, no qual considerar-se-á o problema sobre a minimização do funcional (2.1.2).

Como modelo consideremos o problema espectral

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0. \tag{2.1.4}$$

onde $q(x)$ é uma função não negativa e integrável segundo Lebesgue.

Designaremos por W o conjunto de funções $u(x)$, definidas e com derivada absolutamente contínua sobre o segmento $[a, b]$, de tal forma que

$$\int_a^b \left((u')^2 + q(x)u^2\right) dx < \infty,$$

e que satisfazem as condições de fronteira

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2.1.5}$$

A natureza do funcional considerado no cálculo variacional determina à escolha do espaço de funções. Por exemplo se estivermos lidando com um funcional da forma

$$\int_a^b F(x, u, u')dx$$

[1]Leonhard Euler (1707–1783) — matemático alemão

é natural consideramos como espaço de funções o conjunto de todas as funções cuja primeira derivada é contínua, enquanto que no caso do funcional da forma

$$\int_a^b F(x, u, u', u'')dx,$$

o espaço de funções apropriado é o conjunto de todas as funções com segunda derivada contínua.

Assim, o conjunto W será o espaço das funções do funcional (2.1.2) no problema sobre a minimização deste funcional.

Proposição 2.1.1. *O espaço W é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$[u, v] = \int_a^b ((u'v' + q(x)uv)\, dx.$$

Demonstração. Consideremos só o caso quando $q = 0$.

o produto escalar goza das propriedades

- $[u, v] = \int_a^b u'v'dx = \int_a^b v'u'dx = [v, u]$;
- $[u + z, v] = \int_a^b (u' + z')v'dx = \int_a^b u'v'dx + \int_a^b z'v'dx = [u, v] + [z, v]$;
- $[\lambda u, v] = \int_a^b (\lambda u)'v'dx = \lambda \int_a^b u'v'dx = \lambda[u, v]$;
- $[u, u] = \int_a^b (u')^2dx \geq 0$, sendo que $[u, u] = \int_a^b (u')^2dx = 0 \Rightarrow u = 0$.

Portanto o espaço linear W de dimensão infinita é euclidiano. Mostremos agora que ele é completo.

De facto, seja u_n uma sucessão fundamental, i.e.

$$\int_a^b (u'_n - u'_m)^2\, dx \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Então u_n' é fundamental em L_2, e, portanto, converge para uma função $f \in L_2$ i.e. $u_n'(t) \to f(t), \quad n \to \infty$. Aplicando a integral em ambos os membros temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^x u_n'(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Portanto a função $u(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é o limite da u_n em relação à norma W, já que $u_n(a) = 0$. Isto é,

$$\|u_n - u\| = \int\limits_a^b (u_n' - u_m')^2 + q(x)\,(u_n - u_m)^2\,dx \to 0.$$

Se $u_n' \to u'$ no espaço L_2, então $\int\limits_a^b |u_n' - u_m'|dx \to 0$. Daqui $u_n \to u$ uniformemente.

Em particular $0 = u_n(b) \to u(b)$. Por isso, $u(b) = 0$ e u $\in W$. Da convergência uniforme temos convergência a zero da segunda parcela que contem $q(x)$. □

Designaremos por L_2 o espaço de Hilbert das funções mensuráveis com quadrado integrável segundo Lebesgue sobre o segmento $[a, b]$ e com o produto interno definido por

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2.1.6}$$

Proposição 2.1.2. *O operador $T\colon W \to L_2$ definido pela igualdade*

$$Tu(x) = u(x), \tag{2.1.7}$$

é contínuo.

Demonstração. Mostremos apenas no caso quando $q = 0$.

A continuidade segue das seguintes desigualdades (Cauchy-Bunyakovski),

$$\int\limits_a^b u^2\,dx = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_a^x u'(s)\,ds \right)^2 \leq \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_a^x ds \int\limits_a^x u'(s)^2\,ds \right) \leq [u, u]\frac{(b-a)^2}{2}$$

isto é, $\exists\ C < \infty$ tal que $\|Tu\| \leq C\|u\|$ onde $C = \frac{(b-a)^2}{2}$. □

Proposição 2.1.3. *Seja o operador $T\colon W \to L_2$, definido pela equação $Tu(x) = u(x)$. Então a imagem TW do operador T é densa em L_2.*

Demonstração. Suponhamos que TW não for denso, o fechamento do TW em L_2 vai ser um sub-espaço que é diferente do L_2. Consideremos um vector $f \neq 0$ do complemento ortogonal. Então, $\int_a^b fudx = 0$, para qualquer $u \in W$. Ou

$$0 = \int_a^b fudx = -\int_a^b u'g\,dx$$

onde $g = \int_a^x f(s)\,ds \neq 0$. De

$$\int_a^b u'g\,dx = 0$$

para qualquer $u' \in W$ temos que g é uma constante, mas $g(a) = 0$, por isso $g \equiv 0$. Esta contradição diz que TW é denso em L_2.

$\square$

2.2 A Equação de Euler. Problema Espectral

Nesta secção considerar-se-á a equação de Euler na forma variacional para o funcional quadrático do tipo (2.1.3) que é definido positivamente e estudar-se-ão as condições de resolubilidade do problema espectral para o funcional quadrático.

Representemos o funcional quadrático (2.1.2) na sua forma abreviada

$$\frac{1}{2}[u,u] - (f,Tu). \tag{2.2.1}$$

Consideremos que W e L_2 são espaços arbitrários de Hilbert , e que $T\colon W \to L_2$ é um operador arbitrário linear e contínuo. Os produtos internos em W e L_2 são $[u,v]$ e (f,g) respectivamente. Seja u um ponto mínimo do funcional (2.2.1). Então, para cada $v \in W$ e para qualquer ε real temos que

$$0 \leq \frac{1}{2}[u+\varepsilon v, u+\varepsilon v] - (f, T(u+\varepsilon v)) - \frac{1}{2}[u,u] + (f,Tu) = \varepsilon[u,v] - \varepsilon(f,Tv) + \frac{\varepsilon^2}{2}[v,v].$$

Daqui podemos concluir que quando $\varepsilon \to 0$

$$[u, v] = (f, Tv), \quad \forall v \in W. \tag{2.2.2}$$

Esta equação pode ser chamada de equação de Euler na forma variacional. Da equação (2.2.2) resulta que $[u, v] = [T^* f, v]$, $\forall v \in W$. O que implica que

$$u = T^* f, \tag{2.2.3}$$

onde T^* é operador adjunto para T. Assim, a equação (2.2.2) tem uma solução única (2.2.3) para qualquer $f \in L_2$.

Teorema 2.2.1. *Se a imagem TW do operador T é densa em L_2, então o operador adjunto T^* é uma injecção. Portanto, no conjunto*

$$D_{\mathcal{L}} = T^* L_2 \tag{2.2.4}$$

o operador T^* tem um inverso $\mathcal{L} = (T^*)^{-1}$. Assim, no conjunto $D_{\mathcal{L}}$ a equação (2.2.2) *é equivalente à equação*

$$\mathcal{L} u = f. \tag{2.2.5}$$

Demonstração. Suponhamos que $T^* f = 0$ para um $f \in L_2$. Para qualquer $x \in TW$

$$(f, x) = (f, Tu) = [T^* f, u] = 0.$$

Sendo a imagem TW densa em L_2 em virtude da proposição 2.1.3 temos que f é igual a zero, por isso $KerT^* = \{0\}$, onde $\{0\}$ é o espaço nulo, ou seja T^* é uma injecção.

□

Nota 1. A partir da equação (2.2.2) definida no espaço W nós passamos para a equação (2.2.5) que pode ser considerada só no conjunto $D_{\mathcal{L}} \subset W$.

Teorema 2.2.2. *Suponhamos que a imagem TW do operador T é densa em L_2. Então os problemas espectrais*

$$u = \lambda T^* T u, \tag{2.2.6}$$

$$\mathcal{L}u = \lambda T u \tag{2.2.7}$$

e

$$[u, v] = \lambda(Tu, Tv), \quad \forall v \in W \tag{2.2.8}$$

são equivalentes, ou seja, eles têm soluções não nulas para os mesmos valores de λ, *e essas soluções são idênticas.*

Demonstração. Em virtude do teorema 2.2.1 temos que $\mathcal{L} = (T^*)^{-1}$. Usando a bijecção entre $D_{\mathcal{L}}$ e L_2 podemos introduzir em $D_{\mathcal{L}}$ uma estrutura do espaço de Hilbert conforme a estrutura de L_2, as equações (2.2.6) e (2.2.7) são definidas em diferentes espaços W e $D_{\mathcal{L}}$. No entanto, o operador T^*T é auto-adjunto e compacto, basta remeter para o clássico teorema de Hilbert – Schmidt [3, p. 188] por tanto qualquer solução de (2.2.6) pertence a $D_{\mathcal{L}}$ e por outro lado $D_{\mathcal{L}} \subset W$, por isso os conjuntos de soluções coincidem. No que respeita ao problema espectral (2.2.8) na forma variacional, converte-se à igualdade

$$[u, v] = \lambda[T^*Tu, v],$$

e, portanto, é equivalente à (2.2.6). □

Teorema 2.2.3. *Suponhamos que:*

1) a imagem TW *do operador* T *é densa em* L_2,

2) $\dim \ker T = 0$, *e*

3) T *é compacto.*

Então, a equação (2.2.7) *tem um número enumeável (no sentido próprio) dos auto-valores* $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *que forma uma sucessão não-decrescente de números positivos*

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

tal que $\lim \lambda_n = \infty$ *e*

$$\mathcal{L}u_n = \lambda_n T u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

para algumas funções não nulas (auto-funções).

O sistema das auto-funções u_n *constitui uma base ortogonal no espaço* W.

Demonstração. Do teorema 2.2.1 temos que $KerT^* = \{0\}$ e da condição 2) do teorema em estudo temos que $KerT = \{0\}$, onde $\{0\}$ é o espaço nulo, destes resulta que

$$\dim \ker T^*T = 0.$$

Portanto $Ker(T^*T - \lambda I) = \{0\}$ para $\lambda = 0$, daqui resulta que zero não é um auto-valor do operador T^*T.
Se $u \neq 0$, $[u, v] = \lambda(Tu, Tv), \forall v$, então

$$\lambda = [u, u]/(Tu, Tu) > 0.$$

Em virtude do teorema de Hilbert – Schmidt o operador T^*T é auto-adjunto e compacto, portanto as soluções u_n do problema espectral (2.2.6) formam uma base ortogonal em W e a sucessão λ_n forma uma sucessão não decrescente de números positivos. □

Nota 2. À diferentes vectores u_n podem corresponder valores iguais de λ. Portanto, é cómodo assumir que a desigualdade $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ não é estrita, porque neste caso a cada auto-valor λ_n pode corresponder um único auto-vector u_n, se não considerar multiplicação por factor. Notemos que para valores diferentes de λ correspondem subespaços ortogonais de dimensão finita.

Nota 3. Os auto-vectores u_n estão situados no domínio $D_{\mathcal{L}}$ do operador $\mathcal{L}$. Claramente, $z_n = \mathcal{L}u_n$, $n = 0, 1, \ldots$ são autovectores do operador TT^* e

$$z_n = \lambda_n TT^* z_n.$$

O sistema de soluções $(z_n)_1^\infty$ forma uma base em L_2.

2.2.1 Estudo da Equação Modelo

Nesta subsecção continuamos a análise do modelo introduzido na secção 2.1.

Consideremos a equação (2.2.2) na forma

$$\int_a^b (u'v' + q(x)uv)\,dx = \int_a^b f(x)v\,dx, \quad \forall v \in W. \tag{2.2.9}$$

Proposição 2.2.1. *O operador $\mathcal{L}$ inverso ao operador T^* pode ser representado pela igualdade*

$$\mathcal{L}u = -u'' + q(x)u. \tag{2.2.10}$$

Demonstração. Seja u a solução da equação (2.2.9). Da equação (2.2.2) deduz-se que a solução é única em virtude da igualdade (2.2.3). Seja $h'(x) = -q(x)u + f(x)$, $h(0) = 0$. Então de $\int_a^b (u'v' + q(x)uv)\,dx = \int_a^b f(x)v\,dx$, temos que

$$\int_a^b u'v'\,dx = \int_a^b (-q(x)u + f(x))v\,dx = \int_a^b h'v\,dx = hv\Big|_a^b - \int_a^b hv'dx = -\int_a^b hv'dx, \quad \forall v \in W.$$

Por isso

$$\int_a^b (u' + h)v'\,dx = 0, \quad \forall v \in W.$$

Como $v \in W$ satisfaz as condições de fronteira $v(a) = v(b) = 0$,

$$\int_a^b (u' + h)g\,dx = 0$$

para qualquer g satisfazendo á condição $\int_a^b g\,dx = 0$.

O conjunto ortogonal ao elemento $u = 1$ no espaço L_2 é o hiperplano das funções g que satisfazem $\int g = 0$. Se $\int fg = 0$ para todos os elementos do hiperplano, então isto diz que f é ortogonal ao mesmo hiperplano. Por isso f e 1 são colineares isto é $f = c.1 = c$ (c= constante).

Daqui pode-se resumir que $u' + h = \text{const}$. Notemos que a função h é derivável, por isso u' é derivável e

$$u'' = -h' = q(x)u - f(x).$$

Notemos que a existência de u'' decorre automaticamente do facto que u é uma solução da equação (2.2.9). □

As proposições 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 e o teorema 2.2.1 garantem a existência de um operador inverso ao operador conjugado T^*, onde o operador T é definido por (2.1.7). Da proposição 2.2.1 concluímos que o problema espectral (2.1.4) pode ser representado na forma abstracta $\mathcal{L}u = \lambda Tu$.

Proposição 2.2.2. *O operador T definido por* (2.1.7) *é compacto.*

Demonstração. Vamos usar o critério geral de compacticidade relativa do Gelfand [1, p. 318] em espaço normado, (vide o teorema 2.2.4, pag 26). Sejam $\Omega = \{Tu\colon [u,u] \le 1\}$, $f_n \in L_2$, $f_n(z) \to 0$ $\forall z \in L_2$. Usando a desigualdade de Cauchy-Bunyakovski temos que:

$$(f_n(Tu))^2 = \left(\int_a^b f_n(x)u(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b f_n(x)\int_a^x u'(s)\,ds\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_a^b u'(s)\,ds\int_s^b f_n(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b u'(s)^2\,ds\int_a^b \varphi_n(s)^2\,ds = [u,u]\int_a^b \varphi_n(s)^2\,ds,$$

onde a sucessão $\varphi_n(s)$ é definida por

$$\varphi_n(s) = \int_s^l f_n(x)\,dx,$$

então é suficiente mostrar que $\varphi_n \to 0$ no espaço L_2. Mostremos que φ_n converge uniformemente para zero. Para isso consideremos a função

$$z_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le s, \\ 1 & \text{se } x > s. \end{cases}$$

Temos que

$$\varphi_n(s) = f_n(z_s)$$

(no lado direito da última igualdade a sucessão f_n é considerada como funcional) portanto, sendo z_{s_k} sucessão arbitrára do conjunto $S = \{z_s : s \in [0,l]\}$, da sucessão s_k é possível escolher uma subsucessão convergente. A sucessão correspondente da sucessão z_{s_k} será também convergente portanto, o conjunto $S = \{z_s\colon s \in [a,b]\}$ é relativamente compacto em L_2, por isso, em virtude do mesmo critério de $Gelfand$[2] a sucessão f_n converge uniformemente sobre S. Mas isto é convergência uniforme da sucessão $\varphi_n(s)$. □

[2]Izrái Moiséyevich Gelfand (1913–2009) — matemático russo

Teorema 2.2.4 (Gelfand). *Para a compacticidade relativa de um conjunto E num espaço de Banach X separável é necessário e suficiente que para qualquer sucessão $f_n(x)$ de funcionais lineares e contínuos convergente a zero em cada ponto de X, a sucessão $f_n(x)$ converja uniformemente para zero no conjunto E.*

Proposição 2.2.3. *As auto-funções $u_n(x)$ do problema* (2.1.4) *formam uma base em cada um dos espaços W, L_2, $D_{\mathcal{L}}$ e os auto-valores correspondentes λ_n são positivos e formam uma sucessão não decrescente convergente para infinito.*

Demonstração. Já foi demonstrado que a imagem TW do operador T é densa em L_2 e que o operador T é compacto. Resta-nos mostrar que o problema espectral (2.1.4) é equivalente ao problema espectral (2.2.7) considerando para este problema que

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Da proposição 2.2.1 resulta que

$$\mathcal{L}u = -u'' + q(x)u$$

portanto a proposição fica demonstrada em virtude do teorema 2.2.3. □

2.3 Estudo da Equação Modelo no Caso Geral do Funcional Quadrático

Nesta secção aprofundamos o estudo da equação (2.1.1).

Neste caso vamos omitir a suposição de que a forma quadrática (2.1.3) é positivamente definida. O funcional quadrático pode ser introduzido por sua parte definida positivamente. Por exemplo, podemos representar a função $q(x)$ como uma diferença $q = q_+ - q_-$ de funções não-negativas e usar

$$[u, v]_1 = \int_a^b (u'v' + q_+(x)uv)\, dx.$$

Para simplicidade de designações vamos usar a forma

$$[u, v] = \int_a^b u'v'\,dx. \tag{2.3.1}$$

Assim, o espaço de Hilbert W é também o espaço das funções absolutamente contínuas sobre o segmento $[a, b]$ com quadrado integrável em Lebesgue que satisfazem as condições de fronteira (2.1.5).

Introduzimos o produto escalar pela igualdade (2.3.1).

Representemos o funcional quadrático (2.1.2) na forma

$$\frac{1}{2}\left([u, u] + (Qu, Tu)\right) - (f, Tu), \tag{2.3.2}$$

onde $Q\colon W \to L_2$ é um operador definido por

$$Qu(x) = q(x)u(x). \tag{2.3.3}$$

Notemos que o operador T é contínuo, como foi demonstrado na proposição 2.1.2.

Proposição 2.3.1. *O operador Q é contínuo se $\int_a^b q^2(x)\,dx < \infty$.*

Demonstração. Seja Q um operador não contínuo. Das desigualdades que se seguem

$$\begin{aligned}
\int_a^b q(x)^2u^2\,dx &= \int_a^b q(x)^2dx\left(\int_a^x u'(s)\,ds\right)^2 \\
&\le \int_a^b q(x)^2dx\left(\int_a^x ds\int_a^x u'(s)^2\,ds\right) \\
&\le [u, u]\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b q(x)^2dx,
\end{aligned}$$

temos que o operador Q é limitado. Da contradição obtida chegamos a conclusão que de facto o operador Q é contínuo. $\square$

2.3.1 Equação de Euler

Nesta subsecção e em diante, vamos considerar que W, L_2 são espaços arbitrários de Hilbert com produto interno [u, v] e (f, g) respectivamente, e T, Q são operadores arbitrários lineares e contínuos que agem de um espaço W para o espaço L_2. Alem disso, vamos considerar que a forma bilinear (Qu, Tv) é simétrica, i.e.

$$(Qu, Tv) = (Qv, Tu), \quad \forall u, v \in W. \tag{2.3.4}$$

Seja

$$E(u) = [u, u] + (Qu, Tu). \tag{2.3.5}$$

Como na secção 2.2, obteremos a condição sobre a minimização do funcional (2.3.2) na forma

$$[u, v] + (Qu, Tv) = (f, Tv), \quad \forall v \in W. \tag{2.3.6}$$

Na realidade, o elemento u pode não ser mínimo, mas o elemento é estacionário, i.e. a variação de u não vai conter o termo linear.

Do teorema 2.2.1 segue

Teorema 2.3.1. *Suponhamos que a imagem TW é densa em L_2. Então, a equação de Euler* (2.3.6) *é equivalente à equação*

$$u + T^*Qu = T^*f. \tag{2.3.7}$$

e no conjunto $D_{\mathcal{L}} = T^*L_2$ à equação

$$\mathcal{L}u + Qu = f. \tag{2.3.8}$$

Demonstração. Seja u um ponto mínimo do funcional (2.3.2). Então, para cada v $\in$ w e qualquer ε real temos que

$$0 \leq \frac{1}{2}([u+\varepsilon v, u+\varepsilon v] + (Q(u+\varepsilon v), T(u+\varepsilon v))) - (f, T(u+\varepsilon v)) - \frac{1}{2}([u, u] + (Qu, Tu)) + (f, Tu)$$

$$0 \leq \varepsilon[u,v] + \frac{\varepsilon^2}{2}[v,v] + \varepsilon(Qu,Tu) + \frac{\varepsilon^2}{2}(Qu,Tu) - \varepsilon(f,Tv)$$
$$0 \leq [u,v] + \frac{\varepsilon}{2}[v,v] + (Qu,Tu) + \frac{\varepsilon}{2}(Qu,Tu) - (f,Tv).$$

Daqui podemos concluir que quando $\varepsilon \to 0$

$$[u,v] + (Qu,Tv) = (f,Tv), \quad \forall v \in W.$$

Resulta desta última igualdade que

$$[u,v] + (T^*Qu,v) = (T^*f,v), \quad \forall v \in W,$$

donde temos que

$$u + T^*Qu = T^*f. \tag{2.3.9}$$

Considerando o conjunto $D_{\mathcal{L}} = T^*L_2$ o operador T^* tem inverso $(T^*)^{-1} = \mathcal{L}$, aplicando este operador em (2.3.9) temos

$$\mathcal{L}u + Qu = f.$$

□

2.4 Problema Espectral

Omitindo a restrição de que o funcional quadrático (2.1.3) é positivamente definido, obtivemos a condição sobre a minimização do funcional (2.3.2) na forma variacional

$$[u,v] + (Qu,Tv) = \lambda(Tu,Tv), \quad \forall v \in W.$$

Neste ponto faremos estudo das propriedades obtidas na secção 2.2 com base nesta forma variacional.

Analogamente à equivalência dos problemas espectrais no teorema 2.2.2 teremos.

Teorema 2.4.1. *O problema espectral*

$$\mathcal{L}u + Qu = \lambda Tu \tag{2.4.1}$$

é equivalente às equações

$$u + T^*Qu = \lambda T^*Tu \tag{2.4.2}$$

e

$$[u,v] + (Qu, Tv) = \lambda(Tu, Tv), \quad \forall v \in W. \tag{2.4.3}$$

Demonstração. A equação (2.4.1) é definida no conjunto $D_{\mathcal{L}} = T^*L_2 \subset W$.

Aplicando à equação (2.4.1) o operador T^* temos

$$u + T^*Qu = \lambda T^*Tu$$

na forma variacional converte-se à

$$[u,v] + (Qu, Tv) = \lambda(Tu, Tv), \quad \forall u, v \in W.$$

$\square$

Nota 4. A equação (2.4.1) é definida em $D_{\mathcal{L}}$, e as equações (2.4.2) e (2.4.3) em W, mas as soluções de todas as equações pertencem ao domínio $D_{\mathcal{L}}$.

Se o operador $I + T^*Q$ é invertível, então a equação (2.4.2) é equivalente a

$$u = \lambda(I + T^*Q)^{-1}T^*Tu. \tag{2.4.4}$$

Daqui e do teorema 2.2.3 concluímos que é valido o seguinte teorema.

Teorema 2.4.2. *Suponhamos que*

1) A imagem TW do operador T é densa em L_2,

2) $\dim\ker T = 0$,

3) T é compacto.

Então a equação (2.4.1) *tem solução não nula* u_n *só no caso* $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *i.e.*

$$\mathcal{L}u_n + Qu_n = \lambda_n T u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

O sistema u_n *forma uma base ortogonal no espaço* W.

Demonstração. Suponhamos que o operador $I + T^*Q$ é invertível. O operador $(I + T^*Q)^{-1}T^*T$ é auto-adjunto e compacto (como soma de operador auto-adjunto e compacto e operador contínuo), portanto em virtude do teorema de Hilbert – Schmidt as soluções u_n do problema espectral (2.4.2) formam uma base em W.

Mas se o operador $I + T^*Q$ não tem inverso, este operador pode ser considerado como sendo o limite do operador $I + \mu T^*Q$ quando $\mu \to 1$. Notemos que $\lambda = 0$ vai ser autovalor de dimensão finita (espaço nulo do operador $I + T^*Q$), i.e como $u_n \neq 0$ temos que $I + T^*Q = 0$. □

2.5 Generalização do Modelo

Nesta secção vamos aplicar o esquema estudado na investigação da resolubilidade do problema espectral (2.1.4) na investigação do problema espectral contendo uma equação diferencial funcional dada por

$$-u'' + \int_a^b u(y) d_y r(x, y) = f(x), \tag{2.5.1}$$

onde o símbolo d_y representa o integral de *Stieltjes*[3] relacionado com a variável y.

O integral de Stieltjes conforme a definição é dada por

$$\int_a^b u(x) dr(x) = \lim_{max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i) \triangle r(x_i), \tag{2.5.2}$$

onde

[3] Thomas Jannes Stieltjes (1856–1894) — matemático francês

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, \xi_i \in (x_i, x_{i-1}), \triangle r(x_i) = r(x_i) - r(x_{i-1}).$$

Se a função $r(x)$ for diferenciável e $u(x)$ for contínua, então

$$\int_a^b u(x)dr(x) = \int_a^b u(x)r'(x)dx.$$

Se a função $r(x)$ for constante sobre os segmentos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3]$,... então

$$\int_a^b u(x)dr(x) = u(\beta_1)(r(x_1) - r(x_0)) + ... + u(\beta_n)(r(x_n) - r(x_{n-1})), \tag{2.5.3}$$

onde $x_0 = a, \beta_n \in [x_{n-1}, x_n]$.

Mostremos que a equação estudada na seção 2.1 é obtida da equação (2.5.1).

Se assumiros que $r(x, a) = 0$ para x $\in$ $[a, b]$, pois a função $r(x, y)$ pode ser representada por

$$r(x, y) - r(x, a)$$

e que

$$r(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq x, \\ q(x) & \text{se } y > x, \end{cases}$$

teremos que a função $r(x, y)$ será constante em todos os segmentos $[y_0, y_1], [y_1, y_2], ..., [y_{n-1}, y_n]$ em relação a variável y, onde $y_0 = a$ e $y_n = b$.

Resulta destas condições que

$$\int_a^b u(y)d_y r(x, y) = u(\beta_1)(r(x, y_1) - r(x, y_0)) + ... + u(\beta_n)(r(x, y_n) - r(x, y_{n-1})),$$

onde todas as parcelas são iguais a zero excepto uma:

$$u(\beta_m)(r(x,y_m) - r(x,y_{m-1})),$$

tal que $x \in [y_{m-1}, y_m)$ e assumimos que $u(\beta_m) = 0$ se $\beta_m \notin [a,b]$.

Passando ao limite quando $\beta_m \to x$ e como a função u é contínua, o limite desta soma é igual à $q(x)u(x)$, i.e.

$$\lim_{\beta_m \to x} u(\beta_m)(r(x,y_m) - r(x,y_{m-1})) = q(x) \lim_{\beta_m \to x} u(\beta_m) = q(x)u(x),$$

portanto

$$\int_a^b u(y) d_y r(x,y) = q(x)u(x).$$

Vamos aplicar o esquema estudado na secção 2.3 para o operador Q definido pela igualdade

$$Qu(x) = \int_a^b u(y) d_y r(x,y). \tag{2.5.4}$$

Por essa razão o funcional bilinear (Qu, Tv) será dado por

$$(Qu, Tv) = \int_a^b dx v(x) \int_a^b u(y) d_y r(x,y), \tag{2.5.5}$$

que pode ser representado num modelo simétrico.

Proposição 2.5.1. *seja*

$$\xi(x,y) = \int_a^x r(s,y) ds. \tag{2.5.6}$$

Então a forma (2.5.5) pode ser representada pela igualdade

$$(Qu, Tv) = \int\limits_{I^2} u(y)v(x)d\xi = \int\limits_{I^2} u(y)v(x)\xi(dx \times dy), \tag{2.5.7}$$

onde $I = [a, b]$.

Demonstração. Consideremos somente o caso quando a função $r(x, y)$ é absolutamente contínua em relação a variável y. Então

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b dxv(x) \int\limits_a^b u(y)d_y r(x,y) &= \int\limits_a^b dxv(x) \int\limits_a^b u(y)r'_y(x,y)dy \\
&= \int\int_{I^2} u(y)v(x)r'_y(x,y)dxdy \\
&= \int\int_{I^2} u(y)v(x)d\xi.
\end{aligned}$$

onde

$$\xi(A) = \int_A r'(x,y)dxdy.$$

Portanto

$$\xi(x,y) = \xi([a,x] \times [a,y]) = \int\limits_a^x \int\limits_a^y r'_t(s,t)dsdt = \int\limits_a^x (r(s,y) - r(s,a))ds.$$

□

Se a função $\xi(x, y)$ não decresce para cada argumento de ξ, o integral $\int\limits_{I^2} u(y)v(x)\xi(dx \times dy)$ será uma medida. No caso geral esta é o integral de Lebesgue-Stieltjes e ξ é uma função definida no sistema de subconjuntos de

$$I^2 = [a, b] \times [a, b].$$

A representação (2.5.7) admite de maneira simples verificar a simetria do funcional bilinear (Qu, Tv). Se a função $\xi(x, y)$ for simétrica então o funcional bilinear (Qu, Tv) também será, i.e.

$$(Qu, Tv) = (Qv, Tu).$$

Exemplo 2.5.1. Verifiquemos a simetria do funcional bilinear (Qu, Tv) para a função

$$r(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq \sqrt{l^2 - x^2}, \\ 2x & \text{se } y > \sqrt{l^2 - x^2}, \end{cases}$$

para x, y $\in [0, l]$.

Se $x \leq \sqrt{l^2 - y^2}$, então (neste caso na variação de integração $0 \leq s \leq x$ temos que $r(s, y) = 0$) por essa razão,

$$\xi(x,y) = \int_0^x r(s,y)ds = 0.$$

Se $x > \sqrt{l^2 - y^2}$, temos que $r(s, y) = 2s$ por essa razão,

$$\xi(x,y) = \int_0^x r(s,y)ds = \int_{\sqrt{l^2-y^2}}^x 2sds = x^2 + y^2 - l^2.$$

Portanto

$$\xi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2 + y^2 \leq l^2 \\ x^2 + y^2 - l^2 & \text{se } x^2 + y^2 > l^2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } y^2 + x^2 \leq l^2 \\ y^2 + x^2 - l^2 & \text{se } y^2 + x^2 > l^2 \end{cases} = \xi(y,x),$$

por essa razão a função $\xi(x, y)$ é simétrica e segundo a proposição 2.5.1 o funcional bilinear $(Qu, Tv) = \int_{I^2} u(y)v(x)d\xi$ também será simétrico.

No caso da equação modelo estudada na secção 2.1 redefiniremos a função ξ do seguinte modo

$$\xi(x,y) = \begin{cases} \int_a^x q(s)ds & \text{se } x \leq y, \\ \int_a^y q(s)ds & \text{se } y \leq x. \end{cases}$$

Temos que

$$\xi(x,y) = \begin{cases} \int_a^x q(s)ds & \text{se } x \leq y \\ \int_a^y q(s)ds & \text{se } y \leq x \end{cases} = \begin{cases} \int_a^y q(s)ds & \text{se } y \leq x \\ \int_a^x q(s)ds & \text{se } x \leq y \end{cases} = \xi(y,x),$$

portanto a função $\xi(x, y)$ é simétrica. No caso geral a condição de simetria tem a forma

$$\int_a^x r(s,y)ds = \int_a^y r(s,x)ds. \tag{2.5.8}$$

Por essa razão sob a condição (2.5.8) o funcional quadrático (2.3.5) nesta secção terá a forma

$$E(u) = \int_a^b (u')^2 dx + \int_{I^2} u(y)u(x)d\xi. \tag{2.5.9}$$

Exemplo 2.5.2. Consideremos o problema espectral

$$-u'' + (u(x-\delta) + u(x+\delta)) = \lambda u \quad x \in [0,l], \tag{2.5.10}$$

onde

$$Qu(x) = \int_0^l u(y)d_y r(x,y) = u(x-\delta) + u(x+\delta).$$

Verifiquemos a simetria da forma (Qu, Tv) no caso geral, i.e. sem usar a função $\xi(x, y)$.

Temos que

$$\begin{aligned} (Qu,Tv) &= \int_0^l (u(x-\delta)+u(x+\delta))v(x)\,dx \qquad (2.5.11) \\ &= \int_0^l u(x-\delta)v(x)\,dx + \int_0^l u(x+\delta)v(x)\,dx \\ &= \int_{-\delta}^{l-\delta} u(s)v(s+\delta)\,ds + \int_{\delta}^{l+\delta} u(t)v(t-\delta)\,dt. \end{aligned}$$

Mas $u(x) = 0$ e $v(x) = 0$ quando $x \notin [0, l]$. Por isso,

$$\begin{aligned}(Qu, Tv) &= \int_0^l u(s)v(s+\delta)\,ds + \int_0^l u(t)v(t-\delta)\,dt \\ &= \int_0^l (v(x+\delta) + v(x-\delta))u(x)\,dx \\ &= (Qv, Tu).\end{aligned}$$

Definição 2.5.1. *Diremos que uma função Φ tem variação limitada em $[a, b]$ se ela pode ser representada como a diferença de duas funções monótonas $\Phi = v - g$, onde v é a variação de Φ em $[a, x]$.*

Proposição 2.5.2. *Consideremos que para quase todo $x \in$ [a, b] a função r(x,y) tem variação limitada em y, e esta variação $\in L_2$. Então o operador $Q : W \to L_2$ definido pela igualdade (2.5.4) é contínuo.*

Demonstração. O conceito de integral de Lebesgue-Stieltjes admite uma extensão imediata, ao se passar das funções monótonas às de variação limitada. Sendo $r(x, y)$ uma função de variação limitada, podemos representa-la como diferença de duas funções monótonas e $u(y)$ têm derivada absolutamente contínua em $[a, b]$.

Seja $R(x) = var_y r(x, y)$ a variação de $r(x, y)$ para a variável y.

A continuidade segue das desigualdades

$$\|Qu\|^2 = \int_a^b dx \left(\int_a^b u(y) d_y r(x, y) \right)^2 = \int_a^b dx \left(\int_a^b (r(x, b) - r(x, y))u'(y)dy \right)^2$$

$$\leq \int_a^b dx \int_a^b (r(x, b) - r(x, y))^2\,dy \int_a^b u'(y)dy \leq [u, u].(b-a) \int_a^b R(x)^2 dx.$$

□

Consideremos o problema espectral, assumindo em diante que a condição de simetria (2.5.8) tal como a condição para a função $r(x, y)$ indicada na proposição 2.5.2 cumprem-se.

Neste caso, para o problema espectral

$$-u'' + \int_a^b u(y) d_y r(x,y) = \lambda u, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

pode ser aplicado o teorema 2.4.2. Por essa razão, este problema tem um sistema ortogonal de auto-funções que formam uma base no espaço W.

Exemplo 2.5.3. Consideremos o problema espectral

$$-u'' + k(u(x) + u(l-x)) = \lambda u \tag{2.5.12}$$

sobre o segmento $[a,b] = [0,l]$ com as condições de fronteira

$$u(0) = u(l) = 0, \tag{2.5.13}$$

sendo o coeficiente k um parâmetro real.

Mostremos que o sistema de auto-funções da equação (2.5.12) forma uma base no espaço W.

Seja $r(x,y) = r_1(x,y) + r_2(x,y)$
onde

$$r_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq x, \\ 1 & \text{se } y > x, \end{cases}, \quad r_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq l-x, \\ 1 & \text{se } y > l-x. \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^l u(y) d_y r(x,y) &= \int_0^l u(y) d_y r_1(x,y) + \int_0^l u(y) d_y r_2(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^n u(y_i)(r_1(x,y_i) - r_1(x,y_{i-1})) + \sum_{i=1}^n u(y_i)(r_2(x,y_i) - r_2(x,y_{i-1})) \\ &= u(\beta_m)(r_1(x,y_m) - r_1(x,y_{m-1}) + u(\eta_m)(r_2(x,y_m) - r_2(x,y_{m-1})) \end{aligned}$$

tal que x, $l-x \in [y_{m-1}, y_m)$.

Passando ao limite quando $\beta_m \to x$, $\eta_m \to l-x$ e como a função u é contínua, temos que

$$\lim_{\beta_m \to x} u(\beta_m)(r_1(x,y_m) - r_1(x,y_{m-1}) + \lim_{\eta_m \to l-x} u(\eta_m)(r_2(x,y_m) - r_2(x,y_{m-1})) = u(x) + u(l-x).$$

Portanto

$$\int_0^l u(y) d_y r(x,y) = u(x) + u(l-x).$$

Definemos o operador Q pela igualdade

$$Qu(x) = u(x) + u(l-x) = \int_a^b u(y) d_y r(x,y).$$

Pela virtude da proposição 2.5.1 podemos representar o funcional bilinear (Qu, Tv) pela forma

$$(Qu, Tv) = \int_{I^2} u(y) v(x) d\xi$$

onde

$$\xi(x,y) = \xi_1(x,y) + \xi_2(x,y).$$

Para a função ξ_1 definida por $\xi_1(x,y) = \int_0^x r_1(s,y) ds$ já verificamos a simetria na proposição 2.5.1, portanto resta-nos analisar a função ξ_2 definida por

$$\xi_2(x,y) = \int_0^x r_2(s,y) ds.$$

Seja

$$r_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq l-x, \\ 1 & \text{se } y > l-x. \end{cases}$$

Se $x \leq l - y$, então (neste caso na variação de integração $0 \leq s \leq x$ temos que $r_2(s,y) = 0$) por essa razão,

$$\xi_2(x,y) = \int_0^x r_2(s,y)ds = 0.$$

Se $x > l - y$, temos que $r_2(s,y) = 1$ por essa razão,

$$\xi_2(x,y) = \int_0^x r_2(s,y)ds = \int_{l-y}^x ds = x + y - l.$$

Portanto

$$\xi_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x+y \leq l \\ x+y-l & \text{se } x+y > l \end{cases} = \begin{cases} x+y-l & \text{se } x+y > l \\ 0 & \text{se } x+y \leq l \end{cases} = \xi_2(y,x),$$

ou seja, a função $\xi_2(x,y)$ tem forma simétrica assim como para função $\xi_1(x,y)$ e pela virtude da proposição 2.5.1 o funcional bilinear $(Qu, Tv) = \int_a^b dxv(x) \int_a^b u(y) d_y r(x,y)$ também será simétrico uma vez que $\xi(x,y) = \xi_1(x,y) + \xi_2(x,y)$ tem forma simétrica.

Achemos os auto-valores λ tais que o problema espectral (2.5.12) tenha solução não nula u_λ.

Consideremos o caso em que o parâmetro $k = 0$.

Neste caso o problema (2.5.12) resume-se à

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(l) = 0.$$

a) Se $\lambda < 0$ temos

$$w^2 + \lambda = 0 \Rightarrow w = \pm\sqrt{-\lambda}$$

e a solução será dada por

$$u(x) = c_1 e^{wx} + c_2 e^{-wx}$$

$$\begin{cases} u(0) & = c_1 + c_2 = 0 \\ u(l) & = c_1 e^{wl} + c_2 e^{-wl} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{wl} & e^{-wl} \end{vmatrix} \neq 0$$

portanto para $c_1 = c_2 = 0$ a solução será nula, i.e. $u(x) = 0$ logo $\lambda < 0$ não é auto-valor.

b) Se $\lambda = 0$ o problema resume-se à $u'' = 0$.

A solução será dada por

$$u(x) = c_1 x + c_2$$

$$\begin{cases} u(0) & = c_2 = 0 \\ u(l) & = c_1.l = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \end{cases}$$

deste modo temos que $u(x) = 0$, portanto $\lambda = 0$ não é auto-valor.

c) Se $\lambda > 0$ temos que $w^2 + \lambda = 0 \Rightarrow w = \pm i\sqrt{\lambda}$ e a solução será dada por

$$u(x) = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$$

$$u(0) = c_1 = 0$$

$$u(l) = c_2 \sin wl = 0$$

$$\begin{cases} u(0) & = c_1 = 0 \\ u(l) & = c_2 \sin wl = 0 \end{cases}$$

se $c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin wl = 0 \Rightarrow wl = n\pi \ \forall$ n $\in \mathbb{N}$

de onde $w = \frac{n\pi}{l}$.

Substituindo a solução $u(x) = \sin wx$ para $c_2 = 1$ na equação (2.5.12) teremos

$$w^2 \sin wx + k(\sin wx + \sin(l - x)) = \lambda \sin wx.$$

Em seguida consideremos dois casos possíveis:

a) Se n for par

$$w^2 \sin wx + k(\sin wx + \sin(l - x)) = \lambda \sin wx.$$

$$w^2 \sin wx + k(\sin wx + \sin wl \cos wx - \sin wx \cos wl) = \lambda \sin wx.$$

$$w^2 \sin wx = \lambda \sin wx,$$

ou seja $\lambda = w^2$

b) se n for ímpar

$$w^2 \sin wx + k(\sin wx + \sin wl \cos wx - \sin wx \cos wl) = \lambda \sin wx.$$

$$w^2 \sin wx + 2k \sin wx = \lambda \sin wx,$$

ou seja $\lambda = w^2 + 2k$.

Portanto os valores $\lambda = \lambda_n$, formam uma sucessão não decrescente de números positivos

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

Assim, mostramos que para o problema espectral (2.5.12), (2.5.13), as auto-funções u_n são mesmas que as auto-funções do problema de Sturm-Liouville clássico. Sabemos da teoria de series de Fourier que o sistema $\{u_n\}$ forma uma base no espaço de Hilbert L_2. Da qual segue-se que o sistema é ortogonal e é base no espaço W.

Conclusões e Recomendações

Neste trabalho propôs-se um método para análise do problema espectral, para operadores diferenciais, com base na introdução de dois espaços.

- Estudaram-se as propriedades e condições de resolubilidade do problema espectral para operadores diferenciais funcionais dado um funcional definido positivamente;
- Estudaram-se as propriedades e condições de resolubilidade do problema espectral para uma equação com argumento desviado que representa-se sob forma da integral de Stieltjes;
- Estudaram-se as propriedades de operadores diferenciais funcionais que sob certas condições de simetria são operadores auto-adjuntos.

Para a continuação do trabalho sugeria que:

- Investigasse-se a quantidade de auto-valores negativos no problema espectral e como estes influenciam o sinal do funcional quadrático;
- Investigasse-se alguns operadores concretos para construir sistemas ortogonais;
- Investigasse-se outras aplicações para estes operadores.

Bibliografia

[1] I. Gelfand and S.V.Fomin. *Calculus of variations.* PRENTICE-HALL, INC, Englewood Cliffs, New Jersy, 1963.

[2] S. Labovski. On the Sturm-Liouville problem for a linear singular functional-differential equation. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 40(11(414)):50–56, 1996. (translation from Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. 1996, No.11(414), 48-53 (1996)).

[3] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space.* Dover Publications, INC., New York, 1993.

[4] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Methods of the Conteporaneous Theory of Functional Differential Equations.* Nauka, Moscou, 2001.

[5] G. Helmberg. *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space.* Wiley, 1969.

[6] J. L. Troutman *Variational Calculus And Optimal Contorl: Optimization With Elementary Convexity.* Springer, 1996.

[7] A. Kolmogorov e C. Fomin. *Elementos da teoria de funções e da Análise Funcional.* Dover Pubns, 1999.

[8] Kolmogorov, A. and Fomin, C. *Introductory real analysis.* Dover Pubns, 1975.

[9] V. Hutson, J. Pym, M. Cloud. *Applications of funcional analysis and operator theory.* Elsevier Science, 2005.