# UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

## Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA


## TRABALHO DE LICENCIATURA

**Tema:**

# Casos Integráveis de Equações Diferenciais Funcionais


**Autora:** Tânia Joaquina Tomás

Estudante do curso de Matemática Pura



Maputo, 2009

# UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

## Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática e Informática


## TRABALHO DE LICENCIATURA

## Tema:

# Casos Integráveis de Equações Diferenciais Funcionais


**Autora:** Tânia Joaquina Tomás,

Estudante do curso de Matemática Pura

**Supervisor:** Professor Doutor Andrei Shindiapin,

Professor Catedrático do Departamento de Matemática e Informática, PhD em Matemática.



Maputo, Novembro 2009

**DECLARAÇÃO DE HONRA**

Declaro, por minha honra, que este trabalho nunca foi usado para obtenção de outro grau a não ser o indicado "*Licenciatura em Matemática*"e que ele constitui o resultado da minha investigação pessoal, estando indicados no texto e na bibliografia as fontes que utilizei.

A estudante

______________________________

(Tânia Joaquina Tomás)

# Conteúdo

## AGRADECIMENTOS

À todos que acreditaram e torceram pelo sucesso do meu trabalho, que estenderam a mão nos momentos que mais precisei, sem desmerecer os demais, gostaria de expressar especial gratidão:

- Ao Professor Doutor Andrei Shindiapin, meu Professor e Supervisor, pelo apoio, acompanhamento, sugestões, fontes e incentivo prestados na concepção e prosecussão deste trabalho.

- Aos Docentes e Corpo Técnico do Departamento de Matemática e Informática pela paciência e colaboração! Muito e muito obrigada!

- A meus caros colegas do quarto ano de Matemática Pura-2009, nomeadamente, Alex, Sambo, Manuel, Salvador, Victor e Oliveira, pelo apoio, dicas e amizade que tem dado, muitíssimo obrigada!

- A meu amoroso Deus, Jeová, pela paciência e ajuda fornecida. Sou eternamente grata à Ele.

- À minhas irmãs Sheila, Tacha, Katinha, Ema e Wache. Nos momentos mais árduos sempre estiveram comigo, ajudando-me, apoiando-me e dando-me forças para prosseguir! Sou eternamente grata a elas!

- A meus amigos em especial o Edson, Mama, Baba, Mara, Edma, Raquel, Michelle, Marisa, Helena, Vanessa e os demais por terem estado sempre comigo no decurso do meu curso! Obrigada!

- Aos meus tios e primos Almeida, Flora, Cristina, Nélia, Chico, António e os demais por tudo que fizeram por mim. Obrigada!

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus familiares, em especial à minhas irmãs Sheila, Tacha, Katinha, Ema e Wache, pelo apoio que prestaram ao longo da minha carreira estudantil até o presente momento.

# SIMBOLOGIA

- EDFs - Equações Diferenciais Funcionais
- EDOs - Equações Diferenciais Ordinárias
- EDR - Equação Diferencial Retartada
- $\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais
- $\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais
- $\stackrel{\text{def}}{=}$ - significa "igual por definição"
- $\equiv$ - significa "identicamente igual"
- $\mathbf{R}^n$ - Espaço $n$-dimensional de valores reais
- $L_p[a,b] \equiv L_p \ (1 \leq p < \infty)$ - Espaço de classes equivalentes de funções $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ somáveis em $p$ grau, cuja norma é

$$\|x\|_{L_p} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_a^b |x(t)|dt \right)^{1/p}.$$

- $L_\infty[a,b] \equiv L_\infty$ - Espaço de funções $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ (classes equivalentes) mensuráveis e limitadas na essência, cuja norma é

$$\|x\|_{L_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} vrai\, \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

- $\mathbf{L}$ - Espaço de funções somáveis $z : [a,b] \longrightarrow R^n$.
- $\mathbf{D}$ - Espaço de funções absolutamente contínuas $x : [a,b] \longrightarrow R^n$

- $D^n = D^n[a,b]$ - Espaço de Banach de funções absolutamente contínuas $x : [a,b] \longrightarrow R^n$ com a norma
$$\|x\|_{D^n} = |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s)|ds.$$
- $L^n = L^n[a,b]$ - Espaço de Banach de funções somáveis $y : [a,b] \longrightarrow R^n$ com a norma
$$\|y\|_{L^n} = \int_a^b |y(s)|ds.$$
- $|\cdot|$ - norma em $\mathbb{R}^n$
- $k(t,\cdot)$ significa que $t$ está fixo e $k$ considera-se como uma função somente do segundo argumento.
- $k(\cdot,s)$ significa que $s$ está fixo e $k$ considera-se como uma função somente do primeiro argumento.

# Lista de Figuras

# INTRODUÇÃO

Na obtenção de muitas equações (ordinárias ou com derivadas parciais) [12] que sirvam de modelos matemáticos susceptíveis de descrever processos reais (físicos, tecnológicos, etc.) e consequentemente permitindo o seu estudo, é suposto que o sistema em consideração seja tal que suas variáveis representativas serão determinadas por seus valores num determinado tempo e a sua evolução independente dos estados anteriores à este instante. Muitas vezes, esta forma de casualidade, é uma primeira aproximação da realidade, o que faz com que as vezes este modelo seja invalidado. Estas considerações são importantes em problemas de estudo de comportamento de materiais viscoelásticos, problemas de competição entre espécies, de reguladores automáticos de servo-mecanismos (sistemas de controlo com realimentação), de interacção de partículas carregadas quando se considera que a mesma propaga-se com velocidade finita e, geralmente, em todos processos cuja evolução dependerá de todo seu passado. Muitas vezes, estes processos formulam-se matematicamente por meio de equações diferenciais, integrais, integro-diferenciáveis, etc, nos quais as variáveis de estado que aparecem se encontram referidas com distintos valores da variável independente $t$. Por esta razão, estas equações podem-se denominar argumento desviado.

Alguns tipos de equações diferenciais de argumento desviado já foram estudados nos trabalhos de matemáticos do século XVIII como Euler[1], Condorcet[2] e Poisson[3]. Mas o primeiro a usar e estudar com profundidade as equações deste tipo foi Volterra[4], nos seus trabalhos sobre viscoelasticidade e competição de espécies. Mais tarde, por volta de 1940, motivado pelo estudo da

[1] Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), matemático suíço.

[2] Nicolas de Condorcet (1743 - 1794), matemático françês.

[3] Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), matemático e físico françês.

[4] Vito Volterra (1860 - 1940), matemático e físico italiano.

estabilização de buquês e de sua condução automática, Minorsky [5] percebeu quão importante seria considerar, com vista a maior aproximação da realidade, a existencia de um certo tempo de retardamento na acção do mecanismo de realimentação. O grande interesse que despertou a teoria de controlo nesta década, contribuiu muito para o aumento do estudo da classe de tais equações. Nos últimos anos, o estudo destes problemas tem conhecido um desenvolvimento espetacular tanto de interesse matemático, bem como de suas aplicações, que estão sempre em investigação, consequentemente, em contínua evolução.
Um tipo mais simples de equações diferenciais funcionais pode ser dado como

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(h(t))),\ t \in [a, b],\ h(t) \leq t$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi < a.$$

Todavia, no contexto das equações diferenciais funcionais dependentes da respectiva pré-história, pode-se encontrar equações ainda mais interessantes, como são os casos de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(h(t)), \dot{x}(g(t))),$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t + \delta), \dot{x}(t - \delta)), \quad \delta > 0,\ \text{etc.}$$

Devido ao efeito de retardamento dos argumentos de Equações Diferenciais Funcionais (EDFs), os modelos que envolvem tais equações são mais exactos do que àqueles baseados nas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Ao mesmo tempo, a resolução de EDFs, em muitos casos, não é fácil. Os métodos quantitativos baseam-se na redução de equações mais complicadas para os casos de equações integráveis. Neste contexto, o problema de classificação de EDFs integráveis é de grande interesse e importância.

O presente trabalho é constituido por uma introdução, três capítulos, conclusão e bibliografia. No primeiro capítulo são revistos alguns dos conceitos básicos da teoria das Equações Diferenciais, em especial das Equações Diferenciais Funcionais, que se supõem que sejam, na sua grande maioria, de conhecimento geral. A sua apresentação é feita com a intenção de uniformizar a linguagem e notação e, eventualmente, introduzir algum tópico desconhecido. Com o intuito de apresentar esses resultados de maneira natural, e não deixar única e simplesmente uma lista

[5] Vladimir Minorsky, matemático russo

de resultados importantes, num ou noutro dos assuntos abordados, os resultados apresentados vão para além das necessidades posteriores.

No capítulo 2 faz-se uma abordagem mais precisa de equações da seguinte forma [3, 4]:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_a^b k(t,s)\dot{x}(s)ds,\ \dot{x}(g(t)),\ x(a)\right) \tag{1}$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi) \text{ se } \xi \notin [a,b],$$

fazendo-se uso do **Método de passos** para determinar a solução de tal equação que pode ser escrita explicitamente. Para tal, antes, é feita uma descrição deste método quantitativo, bem como de suas condições de aplicabilidade, que é, sem dúvida, um dos instrumentos principais deste trabalho. Procura-se identificar as classes de equações integráveis definidas em termos das funções $k(t,s)$ e $g(t)$ para a equação (1) por meio de tal método. E, para melhor compreensão, são elaborados exemplos elucidativos para algumas representantes destas classes. Pretende-se que essa abordagem seja sintética.

O terceiro capítulo é dedicado à descrição de outro método quantitativo para a determinação de solucão para alguns casos da equação (1), nomeadamente o **Método de substituição**. São dadas as condições de aplicabilidade e também identificadas algumas classes de equações integráveis para esta equação. Os exemplos apresentados, vem ajudar na compreensão deste método. A sua apresentação é auto-suficiente e não são necessários conhecimentos profundos em Teoria das Equações Diferenciais Funcionais para a sua compreensão. De notar que é nos últimos dois capítulos que se vai centrar o presente trabalho, razão pelo qual constituem os capítulos-chave.

Na compilação deste trabalho foi usado o LaTeX $2_\varepsilon$ e na produção do ambiente gráfico, o Matlab 7.0.1. e zirkel.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, introduz-se conceitos básicos das Equações Diferenciais, em particular, das Equações Diferenciais Funcionais (EDFs). Apresenta-se alguns resultados sobre a existência de solução para equações na forma (1), i.e,

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_a^t k(t,s)\dot{x}(s)ds, \dot{x}(g(t)), x(a)\right),$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi) \quad se \quad \xi \notin [a,b].$$

De salientar que a apresentação deste capítulo tem como base a obra [2].

## 1.1 Conceitos básicos

É um princípio bem estabelecido que para modelar a evolução dos sistemas físicos, biológicos e económicos usa-se equações diferenciais ordinárias em que a resposta do sistema depende exclusivamente do estado actual do sistema. No entanto, em muitas aplicações, a resposta do sistema pode ser retardada ou depender da pré-história do sistema de um modo mais complicado. Sistemas dinâmicos que respondem desta forma são chamados de Equações Diferenciais Funcionais (EDFs). O estudo de materiais com memória (material viscoelástico), em demografia matemática e dinâmica da população, no estudo da dinâmica de redes neurais artificiais em

que há atrasos na transmissão, e em problemas em finanças matemáticas em que mercados ineficientes são modelados, são algumas das áreas em que as equações diferenciais funcionais são aplicadas atualmente.
Considere-se, agora, alguns conceitos básicos sobre as equações diferenciais.

**Definição 1.1.1.** *Uma **equação diferencial** é uma expressão que envolve as derivadas de uma função, bem como a própria função. Se as derivadas parciais estão envolvidas, esta equação chama-se* equação diferencial parcial, *se apenas existem as derivadas comuns, a equação chama-se **equação diferencial ordinária**.*

**Definição 1.1.2.** *A **solução** de equações diferenciais na forma*

$$\dot{x} = Fx,$$

*onde $F : D \longrightarrow L$, é uma função $\tilde{x}(t) \in D$ que satisfaz a equação para quase todos os pontos do tempo $t$ que são de interesse.*

**Observação 1.1.1.** *Embora algumas equações diferenciais possam ser resolvidas, muitas das que são de interesse na práctica não são resolvíveis em funções elementares.*

As equações diferenciais desempenham um papel extremamente importante e útil em matemática aplicada, engenharia e física, e muitos mecanismos matemáticos e numéricos tem sido desenvolvidos para a solução de equações diferenciais.
O objecto do nosso estudo, contudo, está na forma (1).

**Definição 1.1.3.** *Um operador $F : D^n[a,b] \longrightarrow L^n[a,b]$ chama-se **de Volterra** se $\forall\ \delta \in (a,b]$ de facto para $x(t) = y(t)$, no intervalo $[a,\delta]$, cumpre-se que*

$$(Fx)(t) = (Fy)(t), \quad \forall t \in [a,\delta].$$

**Definição 1.1.4.** *Diremos que*

$$\dot{x} = Fx \tag{1.1}$$

*é uma **Equação Diferencial Funcional** (EDF) se o operador $F$ esta definido do seguinte modo*

$$F : D^n[a,b] \longrightarrow L^n[a,b].$$

*Caso $F$ seja operador de Volterra, a equação (1.1) diz-se* ***equação com argumento retardado****.*

**Observação 1.1.2.** *As equações diferenciais retardadas são similares às equações diferenciais ordinárias, mas a sua evolução envolve valores passados da variável de estado. A solução de equações diferenciais atrasadas, portanto, exige conhecimento não apenas do estado actual, mas também do estado de um certo tempo anterior.*

**Definição 1.1.5.** [11]*. Uma EDF chama-se* ***integro-diferencial*** *quando a variável independente $t$ do segundo membro da equação (1.1) encontra-se sob sinal da integral.*

**Definição 1.1.6.** [11]*. Uma equação diz-se* ***equação diferencial neutra*** *se, para além da sua dependência num estado passado, tem também uma dependência temporal na taxa de variação do fenómeno em causa.*

Como exemplo deste tipo de equação podemos ter a equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g(t)), \dot{x}(h(t))),\ t \in [a, b],$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \notin [a, b].$$

A equação (1.1) [5] com um operador $F$ definido em um conjunto de funções absolutamente contínuas é uma **equação diferencial funcional**. Assim, (1.1) é uma generalização mais abrangente da equação diferencial ordinária

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{1.2}$$

Ela também abrange equações integro-diferenciais

$$\dot{x}(t) = \int_a^t k(t, s, x(s))ds,$$

as "equações diferenciais retardadas"

$$\dot{x}(t) = f(t, x[t - \delta]),\ \delta > 0,\ t \in [a, b] \tag{1.3}$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{se } \xi < a,$$

as "equações com retardamentos distribuidos"

$$\dot{x}(t) = f\left(t, \int_a^t x(s) d_s r(t,s)\right)$$

e assim por diante. A equação (1.1) abrange também o nosso objecto de estudo, isto é, a equação (1).

A generalização da equação (1.2) na forma (1.1) une grandes classes de equações que tem sido estudadas sem conexão entre elas. A teoria das equações diferenciais funcionais, debaixo de suposições naturais, já foram tratadas completamente dentro das vizinhanças $\mathcal{O}$, onde foi mostrado que a união das classes acima citadas é determinada pela propriedade de operador $F$, definido no espaço $\mathbf{D}$ de funções absolutamente contínuas $x : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$, ou seja, as funções que podem ser representadas por

$$x(t) = \int_a^t z(s)ds + \beta, \quad z \in \mathbf{L}, \quad \beta \in R^n,$$

onde $\mathbf{L}$ é o espaço de funções somáveis $z : [a,b] \longrightarrow R^n$.

As condições de existência de soluções para uma EDF já foram definidas nos livros [2], [4] e outros. A seguir, passa-se a enunciar um dos teoremas de existência da solução duma EDF.

**Teorema 1.1.1.** *Sejam* $k(t,\cdot) \in L_p,\ k(\cdot,s) \in L_q\ \ (1 < p < \infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. *Seja também que* $f(t,y)$ *satisfaz as condições de Carateodory (vide [1]) e tem lugar a desigualdade*

$$\|f(t,y)\| \leq r(t) + \mu \|y\|^\gamma,$$

*onde* $1 < \gamma \leq \frac{q}{p},\ r \in L_p$. *Então o problema*

$$\dot{x}(t) = f\left(t; \int_a^t k(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a)\right),$$
$$x(a) = \alpha,$$

*tem solução continuável.*

Infelizmente, tais teoremas não nos ajudam a encontrar a solução concreta duma EDF; daí a necessidade de recorrer aos métodos quantitativos para alcançar esta solução. Assim, nos próximos capítulos considera-se dois destes métodos, a saber, o **Método de Passos** e o **Método de Substituição**.

# Capítulo 2

# Método de Passos

Neste capítulo faz-se uma descrição detalhada do método de passos e das condições de aplicabilidade deste método. É através dele que se procura identificar as classes de EDFs integráveis da equação (1),

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_a^b k(t,s)\dot{x}(s)ds,\ \dot{x}(g(t)),\ x(a)\right)$$
$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi) \quad \text{se} \quad \xi \notin [a,b].$$

Para ilustrar, considera-se exemplos de resolução dessas EDFs. Este método quantitativo baseia-se na redução de equações mais complicadas para os casos de equações integráveis; daí este ser um importantíssimo capítulo do presente trabalho.

## 2.1 Descrição

Consideremos a equação (1) dada acima. Procure-se determinar a solução de classes desta equação. Para o efeito, usar-se-á o **Método de Passos de Myshkis** (STEPS) ou simplesmente, **Método de passos** (vide [8], pag. 2-6). Este é um método muito intuitivo e elementar que pode ser usado para resolver, analiticamente, EDFs com coeficientes variáveis. Este método é normalmente descartado por ser muito tedioso.

Em que consiste este método? Em converter a equação diferencial funcional, num determinado intervalo, para uma equação diferencial ordinária no mesmo intervalo, usando a 'pré-história' ou a função inicial para aquele intervalo. A equação resultante é resolvida, e o processo é repetido no próximo intervalo com a recém achada solução, que agora serve como a 'pré-história' para o próximo intervalo. Mostre-se como aplicar isto num caso particular da equação (1), a equação (1.3), ou seja,

$$\dot{x}(t) = f(t, x[t-\delta]), \ t \in [a, b], \ \delta > 0$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{se } \xi < a.$$

**Passo 1.** No intervalo $[a, \delta]$, a equação (1.3) torna-se em

$$\dot{x}(t) = f(t, \varphi(\xi)), \ t \in [a, \delta] \tag{2.1}$$

$$x(0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

A Equação (2.1) é uma EDO e *não* uma EDR porque o valor da função inicial $\varphi(\xi)$ é *conhecido.* Assim, resolve-se esta EDO em $[a, \delta]$, usando $x(0) = \alpha$ como condição inicial. Denote-se a solução no intervalo $[a, \delta]$ por $\dot{x}_1(t)$.

**Nota:** A equação (2.1) pode ser facilmente resolvida usando técnicas de resolução das EDOs.

**Passo 2.** No intervalo $[\delta, 2\delta]$, a equação fica:

$$\dot{x}(t) = f(t, \dot{x}_1[t-\delta]), \ t \in [\delta, 2\delta] \tag{2.2}$$

$$x(\delta) = \widetilde{x}_1(\delta),$$

que também é uma EDO. Usando a condição inicial em (2.2) resolve-se esta equação e determina-se, assim, a solução $\widetilde{x}_2(t)$ para a equação em causa num $[\delta, 2\delta]$.

Pode-se dar continuidade a estes passos para os intervalos subsequentes até completar o intervalo $[a, b]$ ou até mesmo indefinitivamente, se assim se desejar.

**Observação 2.1.1.** [10]. *É possível que a condição inicial $x(a)$ seja diferente da função inicial ou 'pré-história'; neste caso, existe neste ponto um salto simples de descontinuidade e a EDF só é considerada válida se $t \longrightarrow a$.*

Em resumo, o *Método de Passos* consiste na integração directa da equação dada sobre os sub-intervalos regulares de comprimento $\delta$ de $[a, b]$ (vide [9], pag 3). Além disso, também se recorde que a solução de uma EDF depende da 'pré- história' que deverá ser especificada para resolver-se a equação. Este método garante a unicidade da solução da equação.

## 2.2 Condições de aplicabilidade

Para que o método de passos funcione, existem algumas condições que necessitam de ser satisfeitas. Com o objectivo de se entender com mais facilidade estas condições, passa-se a considerar algumas classes da equação (1) em que o método de passos se aplica.

1) Seja a equação diferencial de argumento retardado

$$\dot{x} + p(t)x[h(t)] = f(t) \quad , t \in \ [a, b] \tag{2.3}$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{se } \xi < a$$

onde $\varphi(\xi)$ é função inicial e $h(t)$ é a função retardadora da nossa equação. Esta última função deve ser menor ou igual a $t$, isto é, $h(t) \leq t$; que é o mesmo que dizer que $h(t)$ deve estar representada da seguinte forma

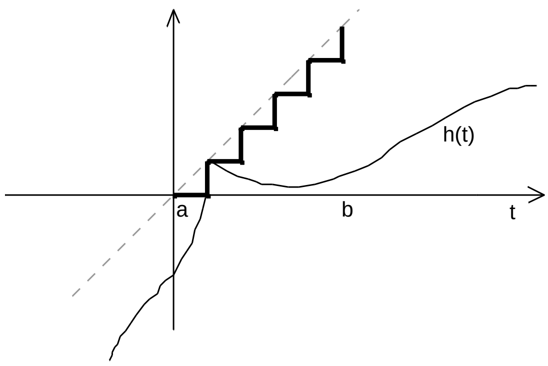


Figura 2.1: Função retardadora $h(t)$ para a EDR $\dot{x} + p(t)x[h(t)] = f(t)$ , $t \in \ [a, b]$.

Sob estas condições pode-se aplicar o método de passos para a equação (2.3). Para isto, antes, parta-se o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos de comprimentos iguais

$$[a, \delta], \ [\delta, 2\delta], \cdots , \ [(i-1)\delta, b],$$

onde $i = 1, 2, \cdots$ .

a) Seja $t \in [a, \delta]$

Ve-se que neste intervalo $h(t) \leq 0$. Então substitui-se $x(t)$ por $\varphi(t)$, ou por outra, $x[h(t)] = \varphi[h(t)]$, tem-se:

$$\tilde{x}_1(t) = \int_a^t [f(\tau) - p(\tau)\varphi[h(\tau)]]\, d\tau + x(a).$$

b) $t \in [\delta, 2\delta]$

A função $h(t) \leq \delta$; logo, $x[h(t)] = \tilde{x}_1[h(t)]$

$\Longrightarrow$ a equação (2.3) fica:

$$\tilde{x}_2(t) = \int_\delta^t [f(\tau) - p(\tau)\tilde{x}_1[h(\tau)]]\, d\tau + \tilde{x}_1(\delta).$$

Analogamente faz-se para os restantes sub-intervalos até que se complete o intervalo. Neste caso ficará, para $t \in [(i-1)\delta, b]$, levando em conta que $h(t) \leq (i-1)\delta$, então $x[h(t)] = \tilde{x}_{i-1}[h(t)]$. Substituindo na equação (2.3) ter-se-á:

$$\tilde{x}(t) = \int_{(i-1)\delta}^t [f(\tau) - p(\tau)\tilde{x}_{i-1}[h(\tau)]]\, d\tau + \tilde{x}_{i-1}((i-1)\delta)$$

**Observação**: Esta é a fórmula geral para achar a solução da equação (2.3) usando o método de passos.

2) Seja a equação

$$\dot{x} + p(t)\dot{x}[g(t)] + x(t) = f(t), \quad t \in [a, b] \tag{2.4}$$

$$\dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \xi < a.$$

A função retardadora $g(t)$ deve ser menor que $t$, i.e., $g(t)$ tem que estar representada do seguinte modo

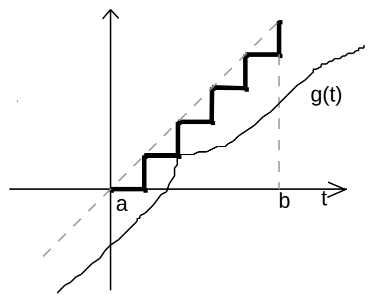


Figura 2.2: Função retardadora $g(t)$ para a EDR $\dot{x}+p(t)x[g(t)]+x(t)=f(t)$ , $t\in$ $[a,b]$.

Parte-se o intervalo $[a,b]$ em sub-intervalos regulares tais que

$$[a,\delta],\ [\delta,2\delta],\cdots,\ [(i-1)\delta,b].$$

a) Seja $t\ \in[a,\delta]$

Ve-se que neste intervalo $g(t)$ é negativo. Então $\dot{x}[g(t)]=\psi[g(t)]$ e ter-se-á:

$$\tilde{x}_1(t)=\int_a^t\left[f(\tau)-x(\tau)-p(\tau)\psi[g(\tau)]\right]d\tau+x(a).$$

b) $t\ \in\ [\delta,2\delta]$

Nota-se que $g(t)\le\delta$; logo $\dot{x}[g(t)]=\tilde{x}_1[g(t)]$

$\Longrightarrow$a equação (2.4) fica:

$$\tilde{x}_2(t)=\int_\delta^t\left[f(\tau)-x(\tau)-p(\tau)\tilde{x}_1[g(\tau)]\right]d\tau+\tilde{x}_1(\delta).$$

De modo anàlogo faz-se para as restantes partições até que se complete o intervalo. Neste caso ficará, para $t\ \in\ [(i-1)\delta,b]$, levando em conta que $g(t)\le(i-1)\delta$, então $\dot{x}[g(t)]=\tilde{x}_{i-1}[g(t)]$. Substituindo na equação (2.4) ter-se-á:

$$\tilde{x}(t)=\int_{(i-1)\delta}^t\left[f(\tau)-x(\tau)-p(\tau)\tilde{x}_{i-1}[g(\tau)]\right]d\tau+\tilde{x}_{i-1}((i-1)\delta),$$

que é a fórmula geral para achar a solução da equação (2.4) usando o método de passos.

3) Seja a equação diferencial neutra

$$\dot{x}+p(t)x[h(t)]+l(t)\dot{x}[g(t)]=f(t),\quad t\in[a,b] \tag{2.5}$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\eta) = \psi(\eta), \quad \text{para} \quad \xi, \eta < a.$$

Esta equação contém duas funções retardadoras, as funções $h(t) > 0$ e $g(t) > 0$ respectivamente. Deve-se considerar que, para $\delta > 0$, cumpre-se a igualdade

$$\delta = \min_{t \in [a,b]} \{t - h(t), t - g(t)\}. \tag{2.6}$$

De modo mais geral , as funções $h(t)$ e $g(t)$ podem estar representadas "sob a escada", conforme ilustrado na figura 2.3

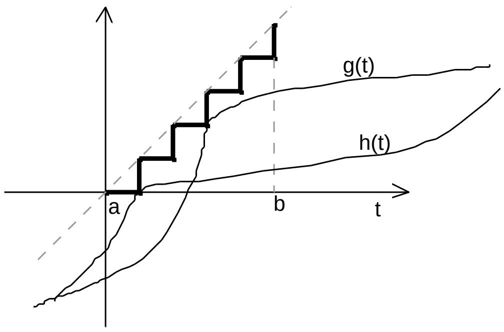


Figura 2.3: Funções retardadoras $h(t)$ e $g(t)$ para a equação (2.5)

Parte-se o intervalo $[a, b]$ em partes iguais tais que

$$[a, \delta], \ [\delta, 2\delta], \cdots, \ [(i-1)\delta, b],$$

e aplique-se o método de passos para a equação (2.6).

a) Seja $t \ \in [a, \delta]$

Ve-se que neste intervalo tanto $h(t)$ como $g(t)$ são negativos. Então $x[h(t)] = \varphi[h(t)]$ e $\dot{x}[g(t)] = \psi[g(t)]$. Assim temos $\dot{x} = f(t) - x[[h(t)] + \dot{x}[g(t)]]$, que ficará

$$\tilde{x}_1(t) \quad = \quad \int_a^t [f(\tau) - (\varphi[h(\tau)] + \psi[g(\tau)])]d\tau + x(a)$$

b) $t \ \in \ [\delta, 2\delta]$

Neste intervalo tem-se que $x[h(t)] = \tilde{x}_1[h(t)]$ e $\dot{x}[g(t)] = \tilde{x}_1[g(t)]$. Daqui vem que

$$\tilde{x}_2(t) = \int_\delta^t [f(\tau) - (\tilde{x}_1[h(\tau)] + \tilde{x}_1[g(\tau)])]d\tau + \tilde{x}_1(\delta).$$

De modo anàlogo faz-se para as restantes partições até que se complete o intervalo. Neste caso, ficará, para $t \ \in \ [(i-1)\delta, b]$, levando em conta que $h(t)$ e $g(t) \ \leq (i-1)\delta$, então $x[h(t)] = \tilde{x}_{i-1}[g(t)]$ e $\dot{x}[g(t)] = \tilde{x}_{i-1}[g(t)]$. Substituindo na equação (2.5) ter-se-á:

$$\tilde{x}(t) = \int_{(i-1)\delta}^{t} [f(\tau) - (\tilde{x}_{i-1}[h(\tau)] + \tilde{x}_{i-1}[g(\tau)])]d\tau + \tilde{x}_{i-1}((i-1)\delta),$$

que é a fórmula geral para achar a solução da equação considerada.

4) E ainda mais a equação

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_a^b k(t,s)\dot{x}(s)ds, x(a)\right),$$

$$\dot{x}(\xi) = \psi(\xi) \quad se \quad \xi \notin [a,b],$$

ou por outra forma,

$$\dot{x}(t) + \int_a^t k(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t), \quad t \in [a,b] \tag{2.7}$$

$$\dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \text{ para } \xi < a,$$

cujo núcleo $k(t,s)$ pode ser representado da seguinte forma

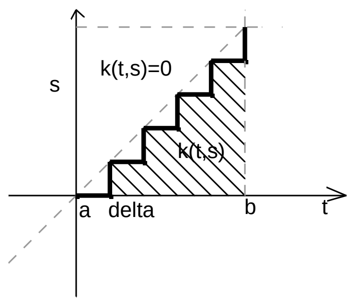


Figura 2.4: Núcleo $k(t,s)$ para a equação (2.7)

Neste caso, parte-se o intervalo $[a,b]$ em sub-intervalos regulares tais que

$$[a,\delta], \ [\delta, 2\delta], \cdots, \ [(i-1)\delta, b],$$

e aplique-se também o método de passos.

a) $t \in [a,\delta]$

É fácil ver que, neste intervalo, $k(t,s) = 0$ e $\dot{x}(\xi) = \psi(\xi)$. Daqui obtem-se que $\dot{x} = f(t)$. Então

$$\tilde{x}_1(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau + x(a).$$

b) $t \in [\delta, 2\delta]$

O valor de $k(t,s)$ varia neste intervalo sendo necessário partir o integral. Assim, levando em conta que $\dot{x}(s) = \tilde{x}_1(t)$, tem-se que (2.7) ficará

$$\dot{x}(t) = \int_{\delta}^{t} \left[ f(\tau) - \int_{a}^{\tau} k(\tau,s)\dot{x}(s)ds + A(\tau)x(a) \right] d\tau$$

assim,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \int_{\delta}^{t} \left[ f(\tau) - \int_{a}^{\tau} k(\tau,s)\tilde{x}_1(s)ds + A(\tau)x(a) \right] d\tau + x(\delta) \\ &= \int_{\delta}^{t} \left[ f(\tau) - \int_{a}^{\delta} (\tau - s)\tilde{x}_1(s)ds + A(\tau)x(a) \right] d\tau + \int_{\delta}^{\tau} 0.\tilde{x}_1(s)dsd\tau + \tilde{x}_1(\delta) \\ &= \int_{\delta}^{t} \left[ f(\tau) - \int_{a}^{\delta} (\tau - s)\tilde{x}_1(s)ds + A(\tau)x(a) \right] d\tau + \tilde{x}_1(\delta) \qquad (2.8) \end{aligned}$$

De maneira análoga faz-se para os restantes sub-intervalos até que se complete o intervalo $[a,b]$, ou por outra, considera-se para $t \in [(i-1)\delta, b]$, tendo em conta que o valor de $k(t,s)$ varia neste intervalo, sendo necessário, por isso, partir o integral. Assim, sendo que $\dot{x}(s) = \tilde{x}_{i-1}(s)$, vem que

$$\tilde{x}(t) = \int_{(i-1)\delta}^{t} \left[ f(\tau) - \int_{a}^{(i-1)\delta} (\tau - s)\tilde{x}_{i-1}(s)ds + A(\tau)x(a) \right] d\tau + \tilde{x}_{i-1}((i-1)\delta),$$

determinando assim, a fórmula geral da solução da equação (2.7) usando o método de passos.

**Observação 2.2.1.** *O núcleo da equação (2.7) pode ainda ser representado do seguinte modo*

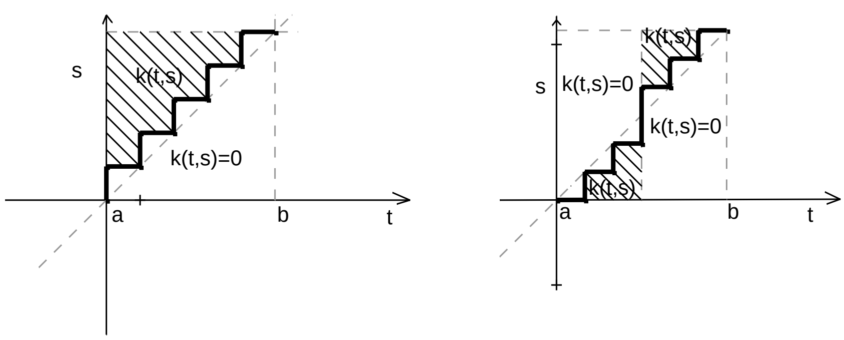


Figura 2.5: Representações do núcleo $k(t,s)$ para a equação (2.7)

*A aplicação do método de passos para os casos acima é análoga ao caso precedente, introduzindo-se apenas uma nova variável para o intervalo* $[a, b]$ *ou seja,* $\delta = t - b$. *Assim, começar-se-á o método de passos da direita para a esquerda e não o contrário, como vinha sendo feito.*

5) Seja a equação:

$$\dot{x}(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b] \tag{2.9}$$
$$x(\xi) = \psi(\xi), \text{ para } \xi < a.$$

Esta equação representa-se na forma (2.7). Realmente, levando em conta que $x(t) = \displaystyle\int_a^t \dot{x}(s)ds + x(a)$ e fazendo a troca de variáveis, obtem-se

$$\begin{aligned}
\int_a^t k(t,s)x(s)ds &= \int_a^t k(t,s)\int_a^\tau \dot{x}(\tau)dsd\tau + x(a)\underbrace{\int_a^t k(t,s)ds}_{A(t)} \\
&= \int_a^t k(t,s)\int_a^\tau \dot{x}(\tau)dsd\tau + A(t)x(a) \\
&= \int_a^t \dot{x}(\tau)d\tau \underbrace{\int_a^\tau k(t,s)ds}_{k_1(t,\tau)} + A(t)x(a) \\
&= \int_a^t k_1(t,\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + A(t)x(a).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

É facil ver que ao substituir (2.10) em (2.9), ter-se-á imediatamente a equação (2.7). Então, o método de passos é aplicável de maneira análoga à equação (2.9).

## 2.3 Exemplos

**Exemplo 2.3.1.** [13]. *Considere-se a equação diferencial retardada*

$$\dot{x} = -x[t-1], \qquad t \in \ [0,3] \tag{2.11}$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi) = 1 \ \ se\ \xi < 0,$$

*com condição inicial* $x(0) = 1$.

**Resolução:** Represente-se primeiro a função $h(t) = t - 1$ graficamente:

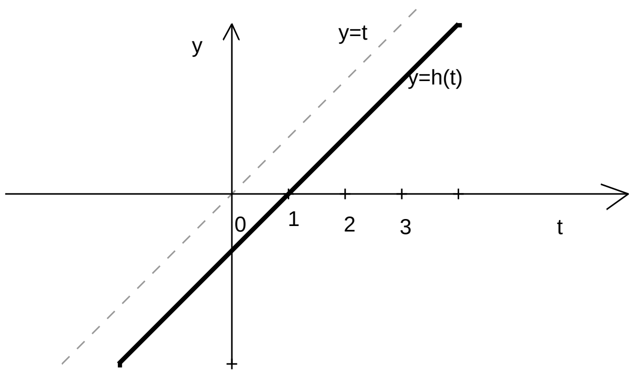


Figura 2.6: Função $h(t) = t - 1$ para a equação (2.11)

Divida-se o intervalo [0,3] em três intervalos de igual dimensão, isto é,

$$[0,1], \ [1,2], \ [2,3]$$

e resolva-se a equação (2.11) em cada um destes intervalos:

a) Seja $t \in [0,1]$

A função $h(t)$ é negativa neste intervalo , isto é, $h(t) < 0$. Então substituindo $x(t-1) = \varphi(t-1) = 1$, ter-se-á:

$$\tilde{x}_1(t) = -\int_0^t \varphi(\tau - 1)d\tau + x(0) = -\int_0^t d\tau + 1 = 1 - t.$$

b) $t \in [1,2]$

Note-se que $h(t) \leq 1$, logo $x(t-1) = \tilde{x}_1(t-1) = 2 - t$, $\tilde{x}_1(1) = 0$

$\Longrightarrow$ a equação (2.11) fica:

$$\tilde{x}_2(t) = -\int_1^t \tilde{x}_1(\tau - 1)d\tau + \tilde{x}_1(1) = -\int_1^t (2-\tau)d\tau + 0 = -2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}.$$

c) $t \in [2,3]$

Neste intervalo, a função $h(t) \leq 2$, então:

$x(t-1) = \tilde{x}_2(t-1) = -2(t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{3}{2}$ e $\tilde{x}_2(2) = -\frac{1}{2}$. Substituindo na equação (2.11) vem que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= -\int_2^t \tilde{x}_2(\tau - 1)d\tau + \tilde{x}_2(2) \\ &= -\int_2^t \left[-2(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\tau - 1)^2 + \frac{3}{2}\right] d(\tau - 1) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por cálculos imediatos obtem-se

$$\tilde{x}(t) = \frac{5}{3} + (t-1)^2 - \frac{1}{6}(t-1)^3 - \frac{3}{2}t,$$

que será a solução final no intervalo $[0,3]$. A resolução gráfica da equação (2.11) é dada abaixo.

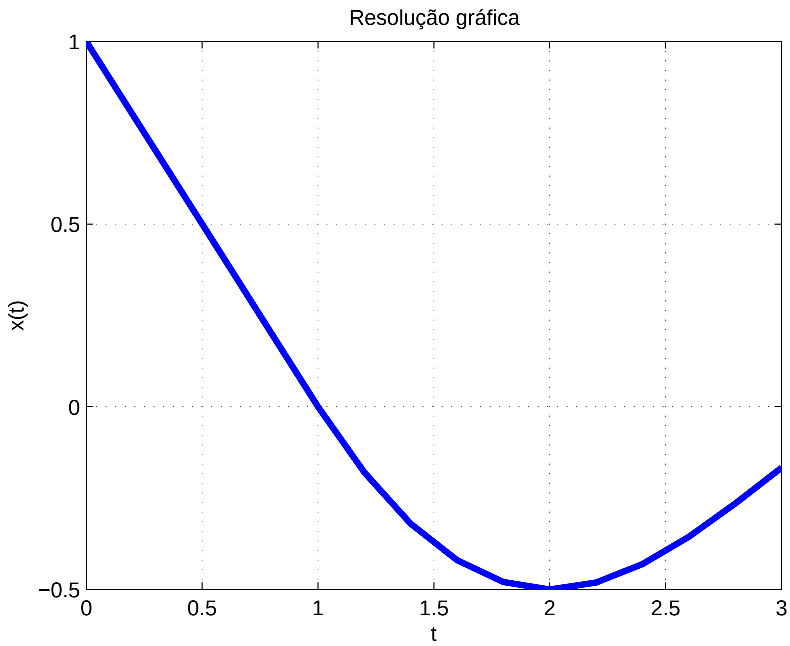


Figura 2.7: Solução da EDR $\dot{x} = -x(t-1)$ usando o método de passos em $[0,3]$.

**Exemplo 2.3.2.** *Seja a seguinte equação diferencial retardada:*

$$\dot{x} = \frac{1}{2} - \dot{x}\left[t - \frac{1}{2}\right] + t^2, \quad t \in \; [0,1] \tag{2.12}$$

$$\dot{x}(\xi) = \frac{1}{2} \quad se\ \xi < 0,$$

*com condição inicial* $x(0) = 0$.

**Resolução:** Represente-se a função $g(t) = t - \dfrac{1}{2}$ graficamente:

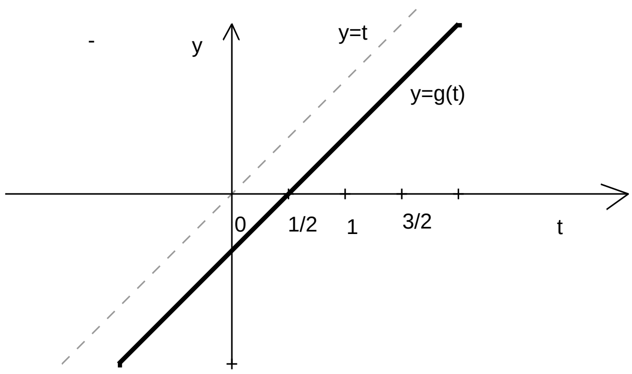


Figura 2.8: Função $h(t) = t - \frac{1}{2}$ para a equação (2.11)

O intervalo $[0, 1]$ pode ser repartido de modo que

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Investigue-se a equação (2.12) em cada um destes intervalos:

a) Seja $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Neste intervalo, $g(t) < 0$. Então $\dot{x}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \psi\left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, com $\xi = t - \frac{1}{2}$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= \int_0^t \left[\frac{1}{2} - \psi\left(\tau - \frac{1}{2}\right) + \tau^2\right] d\tau + x(0) \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \tau^2\right] d\tau + 0 = \frac{t^3}{3}. \end{aligned}$$

b) $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Note-se que $g(t)$ mudou de sinal, isto é, $g(t) > 0$; logo $\dot{x}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \tilde{x}_1\left(t - \frac{1}{2}\right) = \dfrac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^3}{3}$, $\tilde{x}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$. Assim a equação (2.12) fica:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^t \left[\frac{1}{2} - \tilde{x}_1\left(\tau - \frac{1}{2}\right) + \tau^2\right] d\tau + \tilde{x}_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^t \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^3 + \tau^2\right] d\tau + \frac{1}{24}, \end{aligned}$$

por cálculos imediatos tem-se

$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{1}{12}\left(t - \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

A solução da equação (2.12) é dada na forma gráfica do seguinte modo

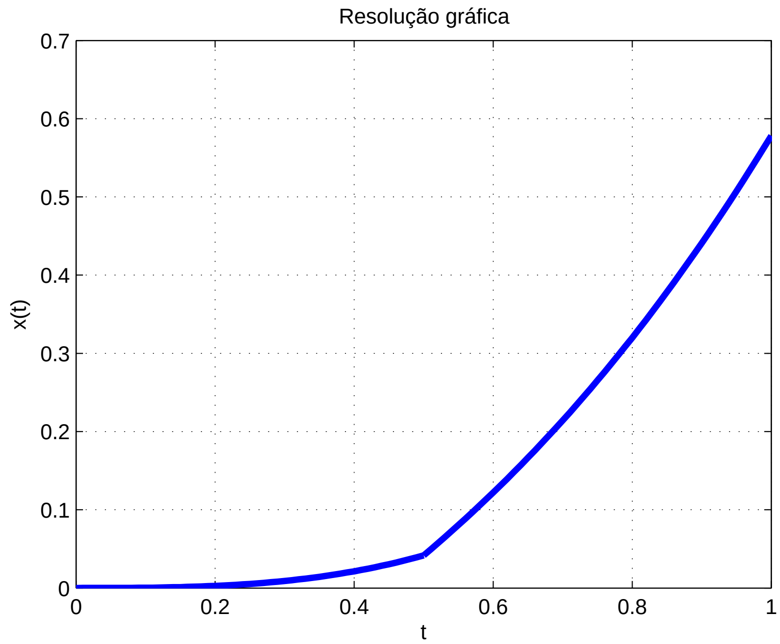


Figura 2.9: Solução da equação $\dot{x} = \frac{1}{2} - \dot{x}\left[t - \frac{1}{2}\right] + t^2$ em $t \in [0,1]$.

**Exemplo 2.3.3.** *Considere-se a equação neutra*

$$\dot{x} + 2x[t-1] - \dot{x}[t-2] = 0, \quad t \in [0,2] \tag{2.13}$$

$$x(0) = 0, \ x(\xi) = \varphi(\xi) = -\xi, \ \ \dot{x}(\eta) = \psi(\eta) = \eta, \ \ \textit{para} \ \ \xi, \eta < 0.$$

**Resolução:** Tem-se que o $\delta$ é determinado pela igualdade

$$\delta = \min_{t\in[0,2]} \{t-(t-1), t-(t-2)\} = \min_{t\in[0,2]} \{1,2\} = 1 \tag{2.14}$$

O gráfico das funções retardadoras $h(t)$ e $g(t)$ será

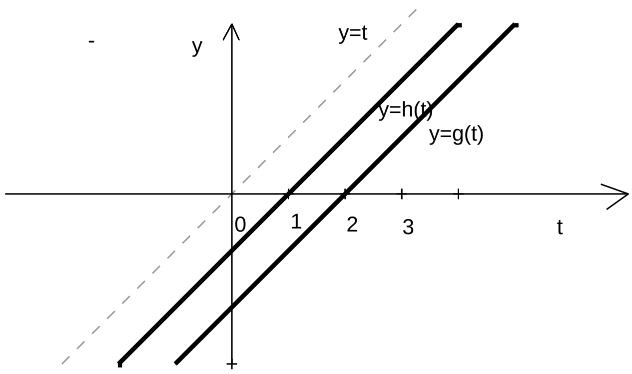


Figura 2.10: Funções $h(t) = t - 1$ e $g(t) = t - 2$ para a equação (2.13)

Aplique-se o método de passos para (2.13). Ter-se-á:

a)Para $t \in [0, 1]$

Sendo $h(t) < 0$ e $g(t) < 0$ então substitui-se $x(t-1) = \varphi(t-1) = 1 - t$, $\dot{x}(t-2) = \psi(t-2) = t - 2$ pois $\xi = t - 1$ e $\eta = t - 2$ respectivamente. Assim tem-se

$$\dot{x} = 2(t-1) + (t-2) = 3t - 4,$$

que ficará

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(t) &= \int_0^t (3\tau - 4)d\tau + x(0) \\
&= \left(\frac{3\tau^2}{2} - 4\tau\right)_0^t + 0 \\
&= \frac{3t^2}{2} - 4t.
\end{aligned}$$

b) $t \in [1, 2]$

Neste intervalo tem-se que

$x(t-1) = \tilde{x}_1(t-1) = \dfrac{3(t-1)^2}{2} - 4(t-1)$, $\dot{x}(t-2) = \tilde{x}_1(t-2) = \dfrac{3(t-2)^2}{2} - 4(t-2)$ e $\tilde{x}_1(1) = -\dfrac{5}{2}$. Assim

$$\dot{x} = -2\tilde{x}_1(t-1) + \tilde{x}_1(t-2),$$

ficará

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2(t) &= \int_1^t [-2\tilde{x}_1(\tau-1)+\tilde{x}_1(\tau-2)]\,d\tau+\tilde{x}_1(1)\\ &= \int_1^t \left[-2\left(\frac{3(\tau-1)^2}{2}-4(\tau-1)\right)+\frac{3(\tau-2)^2}{2}-4(\tau-2)\right]d\tau-\frac{5}{2}\\ &= -\frac{5}{2}-2\int_1^t\left(\frac{3(\tau-1)^2}{2}-4(\tau-1)\right)d(\tau-1)+\int_1^t\left(\frac{3(\tau-2)^2}{2}-4(\tau-2)\right)d(\tau-2),\end{aligned}$$

calculando esta integral tem-se

$$\tilde{x}_2(t) = -(t-1)^3+4(t-1)^2+\frac{(t-2)^3}{2}-2(t-2)^2.$$

A solução da equação (2.13) é dada na forma gráfica seguinte

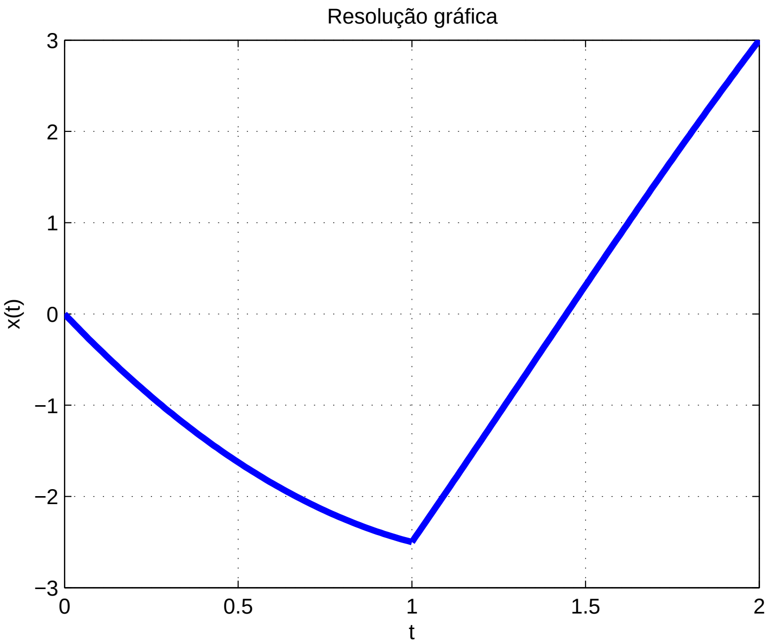


Figura 2.11: Solução da equação $\dot{x}+2x[t-1]-\dot{x}[t-2]=0$ em $t\in[0,2]$

**Exemplo 2.3.4.** *Considere-se a equação integro-diferencial*

$$\dot{x}(t)+\int_0^t k(t,s)\dot{x}(s)ds = t, \quad t\in\left[0,\frac{3}{2}\right], \tag{2.15}$$
$$x(0)=0,\ \dot{x}(\xi)=1,\ \xi<a,$$

*com*

$$k(t,s)=\begin{cases} 0, & se \quad s\geq t-\dfrac{1}{2}\\ t-s, & se \quad s<t-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

**Resolução:** O núcleo $k(t,s)$ para a equação (2.15) é representado no gráfico abaixo:

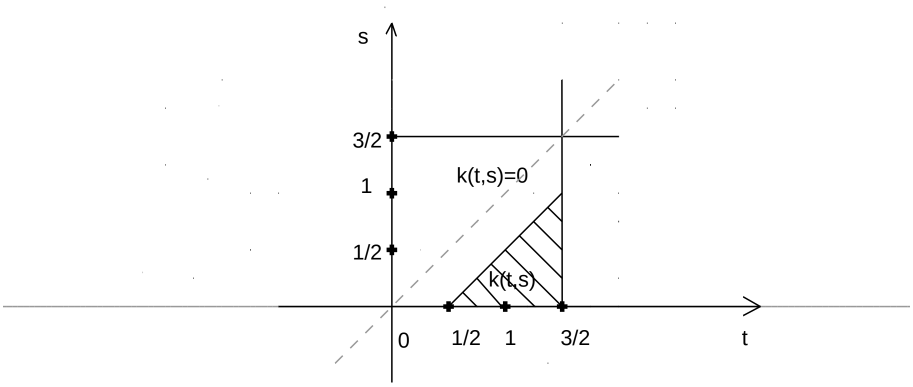


Figura 2.12: Núcleo $k(t,s)$ para a equação (2.15)

Aplicando o método de passos para a equação (2.15) ter-se-á:

a) $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

Aqui é preciso considerar o comportamento de $k(t,s)$ para ver como varia $s$. Neste caso $s \geq t-1,\ x(0)=0$ e $k(t,s)=0$, obtem-se

$$\dot{x} = t,$$

ou por outra

$$\tilde{x}_1(t) = \int_0^t \tau d\tau + x(0) = \left(\frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg|_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

b) $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

Ve-se que o valor de $k(t,s)$ varia neste intervalo sendo necessário partir o integral. Assim, levando em conta que $\dot{x}(s) = \tilde{x}_1(s) = \dfrac{s^2}{2}$ e $\tilde{x}_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$, tem-se que (2.15) fica

$$\dot{x}(t) = t - \int_0^t k(t,s)\dot{x}(s)ds$$

assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_2(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{t}\left(\tau - \int_0^{\tau} k(\tau,s)\frac{s^2}{2}ds\right)d\tau + \tilde{x}_1\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{t}\tau d\tau - \int_{\frac{1}{2}}^{t}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(\tau - s)\frac{s^2}{2}ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\tau} 0ds\right)d\tau + \frac{1}{8}\\
&= \left(\frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg|_{\tau=\frac{1}{2}}^{\tau=t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{t}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(\tau - s)s^2 ds\right)d\tau\\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{t}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(s^2\tau - s^3)ds\right)d\tau
\end{aligned}$$

Por cálculos imediatos tem-se

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{47t^2}{96} + \frac{t}{128} - \frac{1}{768}$$

c) $t \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$

Observa-se que o valor de $k(t,s)$ varia neste intervalo sendo necessário, assim, partir o integral. Assim, levando em consideração que $\dot{x}(s) = \tilde{x}_2(s) = \frac{47s^2}{96} + \frac{s}{128} - \frac{1}{768}$ e $\tilde{x}_2(1) = \frac{381}{768}$, tem-se que (2.15) fica

$$\dot{x}(t) = t - \int_0^t k(t,s)\dot{x}(s)ds$$

assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3(t) &= \int_1^t\left(\tau - \int_0^{\tau} k(\tau,s)\left[\frac{47s^2}{96} + \frac{s}{128} - \frac{1}{768}\right]ds\right)d\tau + \tilde{x}_2(1)\\
&= \int_1^t \tau d\tau - \int_1^t\left(\int_0^1(\tau - s)\left[\frac{47s^2}{96} + \frac{s}{128} - \frac{1}{768}\right]ds + \int_1^{\tau} 0ds\right)d\tau + \frac{381}{768}\\
&= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{381}{768} - \int_1^t\left(\int_0^1(\tau - s)\left[\frac{47s^2}{96} + \frac{s}{128} - \frac{1}{768}\right]ds\right)d\tau,
\end{aligned}$$

imediatamente tem-se

$$\tilde{x}(t) = \frac{961t^2}{2304} + \frac{191t}{1536} - \frac{209}{4608},$$

que é a solução da equação no intervalo considerado. A solução gráfica da equação (2.15) é dada aseguir:

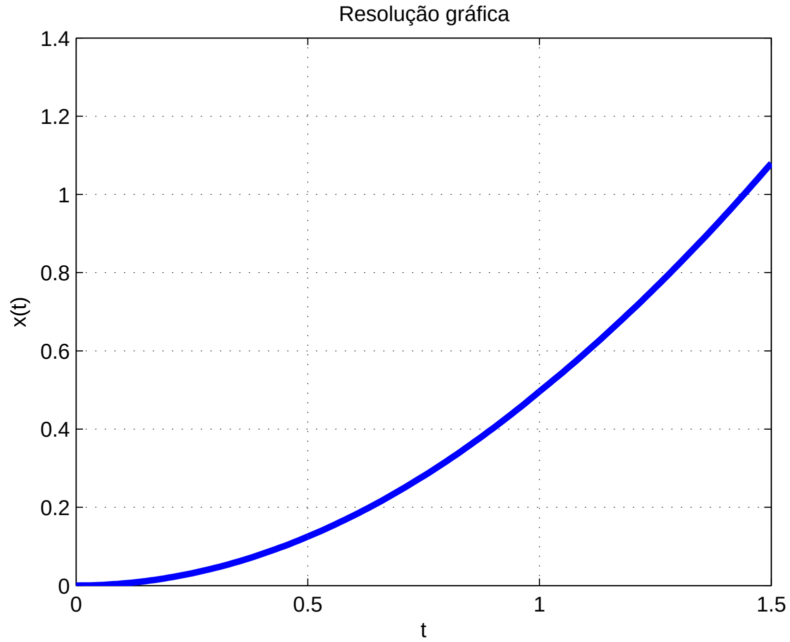


Figura 2.13: Solução da equação $\dot{x}(t) + \int_0^t k(t,s)\dot{x}(s)ds = t,$ usando o método de passos em $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$.

# Capítulo 3

# Método de substituição

Neste capítulo faz-se uma descrição detalhada deste método quantitativo para integração das Equações Diferenciais Funcionais. Procura-se identificar as classes de EDFs integráveis da equação (1), através deste método. São dados exemplos de resolução dessas EDFs e condições de aplicabilidade do método de substituição.

## 3.1 Descrição

Considere-se a equação (1)

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_a^t k(t,s)\dot{x}(s)ds,\ \dot{x}(g(t)),\ x(a)\right)$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi),\quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi)\quad se\quad \xi \notin [a,b],$$

no caso em que

$$k(t,s) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)m_i(s). \tag{3.1}$$

Procure-se aplicar o método de substituição numa classe desta equação, mas antes descrever-se-á tal método.

O método de substituição consiste em substituir a derivada da função incógnita $\dot{x}(t)$ por outra função na EDF, de modo a obter-se uma EDO, ou seja, aplica-se a substituição $\dot{y}_i(s) =$

$m_i(s)\dot{x}(s)$ na EDF em causa para que seja obtida uma EDO que dependa de uma única variável. Mostre-se como isto se realiza numa classe da equação (1), isto é, para a equação (2.9)

$$\dot{x}(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b]$$
$$x(\xi) = \varphi(\xi) \text{ para } \xi < a,$$

com o núcleo separável

$$k(t,s) = r(t)m(s),$$

isto é,

$$\dot{x} + \int_a^t r(t)m(s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t).$$

**Passo 1.** Na integral, procura-se termos que dependem da mesma variável e substitui-se pelo diferencial duma função, ou seja, aplica-se a substituição $\dot{y}(s) = m(s)\dot{x}(s)$ e isola-se o $\dot{x}(s)$, ou por outra,

$$\frac{\dot{y}}{m} + r(t)\int_a^t \dot{y}(s)ds + A(t)x(a) = f(t).$$

**Passo 2.** Resolve-se a equação tomando em conta que $\int_a^t \dot{y}(s)ds = [y(t) - y(a)]$ e obtem-se uma equação diferencial ordinária, isto é

$$\frac{\dot{y}}{m} + r(t)[y(t) - y(a)] + A(t)x(a) = f(t).$$

## 3.2 Condições de aplicabilidade

Para aplicar este método em classes da equação (1) é preciso garantir que as funções $y_i(s)$ e $x(s)$ pertençam ao espaço $L_1[a,b]$. Além disso, as funções $m_i(s)$ devem pertencer ao espaço $L_\infty[a,b]$ com $m_i(s) \neq 0$. Assim, o produto $m_i(s)\dot{x}(s)$ é integrável, pela desigualidade de Hölder. Nestas condicções, é possivel aplicar a substituição

$$\dot{y}_i(s) = m_i(s)\dot{x}(s).$$

**Observação 3.2.1.** *O método de substituição, diferentemente do método de passos, não necessita da 'pré-história' ou função inicial para o seu funcionamento. As condições anteriormente citadas já são suficientes.*

Pode-se aplicar o método de substituição na seguinte classe da equação (1)

$$\dot{x} + \int_a^t k(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.2}$$

$$\dot{x}(\xi) = \psi(\xi) \text{ para } \xi < a,$$

cujo núcleo $k(t,s)$ pode ser dado na seguinte forma gráfica

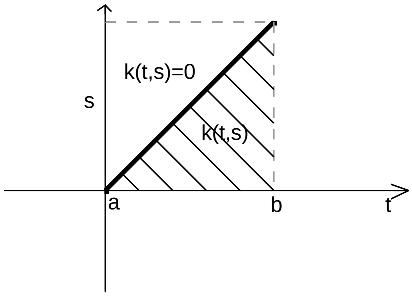


Figura 3.1: Núcleo $k(t,s)$ para a equação (3.2)

Ainda é possivel aplicar este método quantitativo na seguinte equação

$$\dot{x} + l(t)\dot{x}[g(t)] + \int_a^t k(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.3}$$

$$\dot{x}(\xi) = \psi(\xi) \text{ para } \xi < a,$$

onde $k(t,s)$ é representado na figura 3.1 e função $g$ pode-se representar do seguinte modo

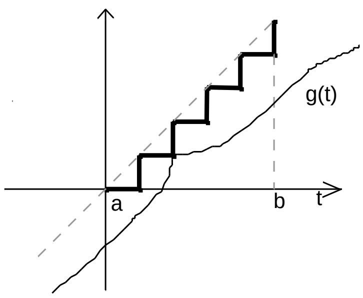


Figura 3.2: Função $g(t)$ para a equação (3.3)

**Observação 3.2.2.** *A equação (3.3) é muito interessante, pois para solucioná-la é necessário aplicar não só o método de substituição, mas também o método de passos em simultâneo.*

Veja-se na prática, como funciona o método de substituição para a equação (3.2). Tendo em conta que

$$k(t,s) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)m_i(s),$$

analise-se a equação caso a caso.

**Caso 1.** Se $k(t,s) = r_1(t)m_1(t) = r(t)m(s)$ para $i = 1$

Neste caso, substituindo em (3.2), ter-se-á

$$\dot{x} + \int_a^t r(t)m(s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t),$$

Fazendo-se a substituição $\dot{y}(s) = m(s)\dot{x}(s) \Longrightarrow \dot{x}(s) = \dfrac{\dot{y}(s)}{m(s)} = \dfrac{\dot{y}}{m}$, tem-se

$$\frac{\dot{y}}{m} + \int_a^t r(t)\dot{y}(s)ds + A(t)x(a) = \frac{\dot{y}}{m} + r(t)\int_a^t \dot{y}(s)ds + A(t)x(a) = f(t).$$

Tomando em conta que $\displaystyle\int_a^t \dot{y}(s)ds = [y(t) - y(a)]$, obtem-se

$$\frac{\dot{y}}{m} + r(t)[y(t) - y(a)] + A(t)x(a) = f(t), \text{para todo } t \in [a,b]. \tag{3.4}$$

Note-se que a expressão (3.4) é uma equação diferencial ordinária que pode ser resolvida aplicando os métodos já conhecidos.

**Caso 2.** Se $k(t,s) = r_1(t)m_1(t) + r_2(t)m_2(s)$ para $i = 2$

Para este caso, substituindo em (3.3), ter-se-á

$$\dot{x} + \int_a^t [r_1(t)m_1(s) + r_2(t)m_2(s)]\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t),$$

Fazendo-se a substituição $\dot{y}_1(s) = m_1(s)\dot{x}(s)$. Assim,
$\dot{x}(s) = \dfrac{\dot{y}_1(s)}{m_1(s)} = \dfrac{\dot{y}_1}{m_1}$ e $m_2(s)\dot{x}(s) = \dfrac{m_2\dot{y}_1}{m_1}$ tem-se

$$\frac{\dot{y}_1}{m_1} + \int_a^t \left[r_1(t)\dot{y}_1(s) + r_2(t)\frac{m_2\dot{y}_1}{m_1}\right] ds + A(t)x(a) = f(t).$$

Fazendo agora a substituição $\dot{y}_2(s) = \dfrac{m_2(s)\dot{y}_1(s)}{m_1(s)} = \dfrac{m_2\dot{y}_1}{m_1}$, ter-se-á

$$\frac{\dot{y}_1}{m_1} + \int_a^t [r_1(t)\dot{y}_1(s) + r_2(t)\dot{y}_2(s)]\, ds + A(t)x(a) = f(t).$$

que é o mesmo que

$$\frac{\dot{y}_1}{m_1} + r_1(t)\int_a^t \dot{y}_1(s)ds + r_2(t)\int_a^t \dot{y}_2(s)ds + A(t)x(a) = f(t).$$

Tomando em conta que $\displaystyle\int_a^t \dot{y}(s)ds = [y(t) - y(a)]$, obtem-se

$$\frac{\dot{y}_1}{m_1} + r_1(t)[y_1(t) - y_1(a)] + r_2(t)[y_2(t) - y_2(a)] + A(t)x(a) = f(t), \text{para todo } t \in [a, b]. \quad (3.5)$$

Nota-se que a expressão (3.5) é uma EDO.

Generalizando o valor de $k(t, s)$, obtem-se

$$\frac{\dot{y}_1}{m_1} + \sum_{i=1}^{n} r_i(t)[y_i(t) - y_i(a)] + A(t)x(a) = f(t), \text{para todo } t \in [a, b]. \quad (3.6)$$

onde (3.6) fornece equações diferenciais ordinárias (EDOs) que podem ser resolvidas facilmente mediante os métodos já conhecidos de cursos básicos de Equações Diferenciais.

## 3.3 Exemplos

**Exemplo 3.3.1.** *Considere-se a seguinte equação integro-diferencial*

$$\dot{x} + \int_0^t k(t, s)\dot{x}(s)ds = 1, \quad t \in [0, 2] \quad (3.7)$$

$$x(0) = 0, \ \dot{x}(\xi) = \varphi(\xi) \ \textit{para} \ \xi < 0,$$

*com* $k(t, s) = r_1(t)m_1(s) = ts.$

**Resolução:** Investigue-se a equação acima para valor de $k(t, s)$ dado. Fazendo a substituição em (3.7) vem

$$\dot{x} + \int_0^t ts\dot{x}(s)ds = 1,$$

sendo $\dot{y}(s) = m_1(s)\dot{x}(s) = s\dot{x}(s) \Longrightarrow \dot{x}(s) = \dfrac{\dot{y}(s)}{s}$, ou $\dot{x}(t) = \dfrac{\dot{y}(t)}{t}$, tem-se

$$\frac{\dot{y}}{t} + t\int_0^t \dot{y}(s)ds = 1,$$

por cálculos imediatos, obtem-se

$$\frac{\dot{y}}{t} + t[y(t) - y(0)]) = 1,$$

que é o mesmo que

$$\dot{y} + t^2[y(t) - y(0)] = t, \text{ para todo } t \in [0, 2].$$

Esta expressão é uma equação ordinária facilmente resolvível.

**Exemplo 3.3.2.** *Considere-se denovo a equação (3.7), mas desta vez, com um núcleo diferente; seja* $k(t, s) = st^2 + e^{s+t}$.

**Resolução:** Substituindo em (3.7) tem-se

$$\dot{x} + \int_0^t (st^2 + e^{s+t})\dot{x}(s)ds = 1.$$

Seja $\dot{y}_1(s) = s\dot{x}(s)$ que ficará $\dot{x}(s) = \dfrac{\dot{y}_1}{s}$ ou $\dot{x}(t) = \dfrac{\dot{y}_1}{t}$ e $\dot{x}(s)e^s = \dfrac{e^s\dot{y}_1}{s}$,, resultando em

$$\frac{\dot{y}_1}{t} + t^2 \int_0^t \dot{y}_1(s)ds + e^t \int_0^t \frac{e^s\dot{y}_1}{s} ds = 1.$$

Faz-se mais uma vez a substituição $\dot{y}_2(s) = \dfrac{e^s\dot{y}_1}{s}$, ter-se-á

$$\frac{\dot{y}_1}{t} + t^2 \int_0^t \dot{y}_1(s)ds + e^t \int_0^t \dot{y}_2(s)ds = 1.$$

Por cálculos imediatos obtem-se

$$\frac{\dot{y}_1}{t} + t^2[y_1(t) - y_1(0)] + e^t[y_2(t) - y_2(0)] = 1,$$

ou por outra

$$\dot{y}_1 + t^3[y_1(t) - y_1(0)] + te^t[y_2(t) - y_2(0)] = t, \text{ para todo } t \in [0, 2],$$

que também é uma EDO.

# Conclusões e recomendações

Descreveu-se as classes das EDFs que são geralmente mais difícies para o estudo e portanto precisam ser reduzidas para as equações ordinárias. Para o efeito, fez-se uso de métodos quantitativos que vieram facilitar e muito a nossa investigação, pois eles reduzem EDFs complicadas, como o caso da equação (1), em EDOs que podem ser facilmente resolvidas.

Os métodos de resolução de EDFs apresentados neste trabalho podem ser úteis na elaboração de métodos aproximados de solução de EDFs.

A construção de tais métodos aproximados não foi objectivo deste trabalho, mas seria interessante considerar este aspecto com mais atenção.

É de realçar que os exemplos apresentados são de carácter elucidativo, podendo-se ainda formar outros exemplos mais interessantes, como o de aplicações prácticas nas variadíssimas áreas da vida.

Sugere-se a continuação da selecção de classes de equações diferenciais funcionais em termos de funções $f$, $g$ e $k(t,s)$. Neste trabalho só se consideraram casos de equações diferenciais funcionais com argumento retardado, mas poder-se-ia considerar equações diferenciais funcionais com retardamentos distribuidos, equações diferenciais estocásticas, e outras.

Infelizmente nem todas classes da equação (1) são facilmente integradas por meio dos métodos quantitativos apresentados neste trabalho, havendo necessidade de recorrer a outros métodos.

# Bibliografia

[1] M. J. Alves, *Equações Diferenciais Funcionais Singulares de Segunda Ordem*, Perm State University Press, Perm 2000.

[2] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov and L.F. Rakhmatulina, *Introdution to the Theory of Linear Functional Differential Equations*, Prognoz, Russia, 1992.

[3] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov and L.F. Rakhmatulina, *Introdution to the Theory of Functional Differential Equations*, World Federation Publishers Inc., Atlanta, 1996.

[4] N.V. Azbelev and L.F. Rakhmatulina, *Theory of Linear Abstract Functional Differential Equations and Applications*, Mem. Differential Equations Math. Phys. 8 (1996), pp. 1-102.

[5] N.V.Azbelev, V.P.Maksimov, L.F.Rakhmatullina, *Introduction to the contemporary theory of functional differential equations. Methods and applications*, pp. 2-5.

[6] N.V.Azbelev, V.P.Maksimov and L.F.Rakhmatulina, *Methods of the contemporaneous theory of functional differential equations*, 1996, pp 40-43

[7] S. Bernand, J. Bélair and M. C. Mackel, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, volume 1, 2001.

[8] C. E. Falbo, *Some elementary methods for solving functional differential equations*, Sonoma State University, pp. 3-5

[9] J.E. Forde, *Delay Differential Equation Models in Mathematical Biology*, in The University of Michigan, 2005.

[10] J. M. Heffernan and R. M. Corless, *Solving some delay differential equations with computer algebra*, The University of Western Ontario, 2005, pp. 3-9.

[11] R. A. Nhamunue, *Sobre a Construção Aproximada da Matriz de Cauchy para Equações Diferenciais Funcionais*, Universidade Eduardo Mondlane, 2006.

[12] J. F. Pérez, *Introduccion a los Procesos Diferenciales*, Editorial Tecnos, Madrid, 1981.

[13] M. R. Roussel, *Delay-differential equations*, November 22, 2005, pp. 2-5